UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023

LICENCE 3 – ALGÈBRE LINÉAIRE AVANCÉE R. ABDELLATIF

Examen de première session – Lundi 15 Mai 2023 (Durée : 2 heures)

Jusqu'à 3 points pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité de la production écrite. Si vous estimez que le sujet comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque sur la copie et poursuivez la rédaction en conséquence. Si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous faut la (ou les) mentionner explicitement sur votre copie.

Aucun document n'est autorisé durant l'épreuve. Les calculatrices et téléphones portables sont interdit·e·s durant l'épreuve.

Ce sujet comporte deux pages, cinq exercices et un exercice bonus. Toute réponse donnée doit être justifiée. En particulier les exercices faits en travaux dirigés ne peuvent être cités sans preuve : seuls les résultats vus en cours peuvent être utilisés sans démonstration.

Exercice 1. — Questions de cours (7 points) —

1. Enoncer le théorème de classification des modules de type fini sur un anneau principal.
2. Donner un exemple de module libre qui n'est pas de type fini.
3. Les groupes $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/132\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/121\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/105\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?
4. Un espace vectoriel est-il toujours isomorphe à son espace bidual ?
5. Donner un exemple d'endomorphisme non nul du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont le polynôme minimal sur $\mathbb{R}$ n'est pas égal au polynôme caractéristique.

Exercice 2. — (4 points) —

1. Démontrer que si X et Y sont deux indéterminées, on a alors un isomorphisme d'anneaux naturel entre $\mathbb{Z}[X]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[Y]$ et $\mathbb{Z}[X,Y]$.
2. Démontrer que l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 3. — (3 points) —

Soit $n \geq 1$ un entier.
On note $\mathbb{Q}_n[X]$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ vérifiant $\deg(P) \leq n$.
Pour tout nombre rationnel α, on note $\varepsilon_\alpha : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$ l'application d'évaluation en α :

$$\forall\ P \in \mathbb{Q}[X],\ \varepsilon_\alpha(P) := P(\alpha)\ .$$

1. Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, ε_α est une forme linéaire sur $\mathbb{Q}_n[X]$.
2. Etant donné $n+1$ nombres rationnels deux à deux distincts $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n+1}$, démontrer que la famille $(\varepsilon_{\alpha_i})_{1\leq i\leq n+1}$ est une base de l'espace dual $\mathbb{Q}_n[X]^*$.

Exercice 4. — (3 points) —

1. Déterminer une base du $\mathbb{Z}$-module $M = \mathbb{Z}^3$ adaptée au sous-$\mathbb{Z}$-module N engendré par $\{(1,0,3)\,;(0,3,2)\}$.
2. Déterminer les facteurs invariants du module quotient M/N.

T.S.V.P.

Examen de première session – Lundi 15 Mai 2023 (Durée : 2 heures)

Exercice 5. — (3 points) —
Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme cyclique de E.

1. Prouver l'existence d'un vecteur non nul $u \in E$ tel que la famille $\{f^k(u),\ 0 \leq k \leq n-1\}$ soit une base de E sur $\mathbb{K}$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?
2. (a) Démontrer que si f est un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes, alors f est un endomorphisme cyclique.
   (b) L'assertion réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6. — Bonus (3 points) —
Démontrer que pour tout groupe commutatif fini G, le produit tensoriel $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est bien défini, puis qu'il est réduit à $\{0\}$.