Examen final "Algèbre linéaire avancée", L3 maths

Mai 2022

Vous justifierez chacune de vos réponses

1. Rappeler le théorème d'isomorphie pour les modules sur un anneau commutatif unitaire.
2. Rappeler le théorème de classification des modules de type fini sur un anneau principal.
3. Donner, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre 36.
4. Donner un exemple d'anneau commutatif unitaire qui n'est pas principal.
5. Donner un exemple de module qui n'est pas de type fini.
6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers m, n pour que la famille $\{m, n\}$ engendre $\mathbb{Z}$.
7. Soit R un anneau commutatif unitaire. Démontrer qu'un sous-ensemble $A \subset R$ est un sous R-module de R si et seulement si A est un idéal de R.
8. Soit $R[X]_n$ le sous-ensemble de $R[X]$ formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à n, ce sous-ensemble est-il un sous $R[X]$ -module de $R[X]$?
9. Soit $\mathbb{Q}[X]_n$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n , soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ on considère l'application d'évaluation

$$ev_\alpha : \begin{cases} \mathbb{Q}[X]_n \to \mathbb{Q} \\ P(X) \mapsto P(\alpha) \end{cases}$$

on admettra que ev_α est une forme linéaire. Vous montrerez que pour $n+1$ nombres rationnels deux à deux distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ la famille

$$\{ev_{\alpha_1}, \dots, ev_{\alpha_{n+1}}\}$$

est une base de l'espace vectoriel dual $\mathbb{Q}[X]_n^*$.

10. Donner un exemple d'endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ qui a un polynôme caractéristique et un polynôme minimal différents.
11. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui a même polynômes caractéristique et minimal.
12. On rappelle qu'un endomorphisme f d'un **k**-espace vectoriel E est cyclique si il existe un vecteur $u \in E$ tel que la famille

    $$\{f^i(u) : i \in \mathbb{N}\} = \{u, f(u), f(f(u)), \dots\}$$

    est une famille génératrice. On suppose que $dim(E) = 3$ vous montrerez que pour tout $k \geq 3$ on a $f^k(u) \in Vect(u, f(u), f^2(u))$ (Indication : vous utiliserez le polynôme caractéristique de f).
13. En utilisant les hypothèses de la question précédente vous en déduirez que $\{u, f(u), f^2(u)\}$ est une base de E.
14. Vous écrirez la matrice de f dans la base $\{u, f(u), f^2(u)\}$ et calculerez son polynôme caractéristique.
15. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a 3 valeurs propres distinctes montrer que f est cyclique.