Examen seconde session (21 juin 2022)

Exercice 1. Soient R un anneau commutatif unitaire et M un R-module. On définit l'***annulateur*** de M par $I = \{r \in R \mid rM = 0\}$.

1. Montrer que I est un idéal de R.
2. Quel est l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
4. Quel est l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $M := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Exercice 2. (Bidual)
Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel

1. Pour $x \in E$, on définit $ev_x : E^* \to \mathbb{k}$ par
$$\forall \varphi \in E^*,\ ev_x(\varphi) := \varphi(x)$$
(ev_x est l'évaluation en x des formes linéaires). Montrer que ev_x est une forme linéaire sur E^* (donc un élément du bidual E^{**}).
2. Montrer que l'application $ev : E \to E^{**}$ envoyant x sur ev_x est une application linéaire.
3. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. À l'aide d'une base de E contenant x, construire une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$. En déduire que ev est injective.
4. Si E est de dimension finie, en déduire que ev est un isomorphisme de E vers son bidual.

Exercice 3. (Groupe abélien de type infini)
On définit
$$\mu_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, z^n = 1\} \subset \mathbb{C}$$

1. Montrer que μ_∞ est un sous-groupe (abélien) de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que $\mu_\infty \subsetneq \mathbb{S}^1$.
3. On suppose que μ_∞ est de type fini.
   a) Montrer que μ_∞ n'admet pas de partie libre (pensez à l'ordre des éléments).
   b) En déduire que μ_∞ est un groupe abélien fini.
   c) En déduire par l'absurde que μ_∞ n'est pas un groupe abélien de type fini.