TD hors série - Espaces quotients, transvections

Exercice 1 (Endomorphisme quotient). Soit E un k-espace vectoriel, et $u \in \mathrm{End}(E)$.

1. Soit $F \subset E$ un sous-espace de E globalement stable par u. On pose $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. Montrer que u induit un endomorphisme $\overline{u}$ de E/F.
2. Montrer que π induit un isomorphismes de $k[X]$ modules entre le quotient $(E, u)/(F, u_{|F})$ et $(E/F, \overline{u})$.
3. On suppose que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{F} := (a_1, \ldots, a_r)$ une base de F, que l'on complète en une base $\mathcal{B} := (a_1, \ldots, a_r, b_{r+1}, \ldots, b_n)$ de E. Montrer que $\overline{\mathcal{B}} = (\pi(b_{r+1}), \ldots, \pi(b_n))$ est une base de E/F.
4. Montrer que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$
où $A = Mat_{\mathcal{F}}(u_{|F})$ et $Q = Mat_{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{u})$.
5. Réciproquement, montrer que si un endomorphisme de E admet une matrice de la forme ci-dessus dans une base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors $F := \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ est u-stable et $A = Mat_{(e_1,\ldots,e_r)}(u_{|F})$ et $Q = Mat_{\overline{\mathcal{E}}}(\overline{u})$.

Exercice 2 (Ma première transvection). Soit $E = k^2$, on définit
$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer par récurrence que
$$\forall n \geqslant 1, \quad T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
En déduire l'ordre de T (on fera attention à la caractéristique de k).
2. Montrer que $\det(T) = 1$.
3. Montrer que T n'est pas diagonalisable.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(T - I_2) \subset \mathrm{Ker}(T - I_2)$.

Exercice 3 (Transvections). Soit E un k-espace vectoriel. Soit $\alpha \in E^* \setminus \{0\}$ et $c \in \mathrm{Ker}\,\alpha \setminus \{0\}$. On pose $u = \tau(\alpha, c)$ l'endomorphisme de E
$$\forall x \in E,\ \tau(\alpha, c)(x) = x + \alpha(x)c$$
que l'on appelle *transvection* associée à α et c.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\alpha = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Vect}(c) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. On pose $H := \mathrm{Ker}\,\alpha$ et $D := \mathrm{Im}(u - Id)$.
2. Montrer que les transvections sont inversibles, avec $(\tau(\alpha, c))^{-1} = \tau(\alpha, -c)$.
3. Montrer que H et D sont u-stables, et que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$, $u_{|D} = \mathrm{Id}_D$.
4. Montrer que les endomorphismes induits par u sur les quotients E/H et E/D sont respectivement $\mathrm{Id}_{E/H}$ et $\mathrm{Id}_{E/D}$.

Exercice 4 (Transvections en dimension finie). Soit E un k-espace vectoriel de dimension n. Soit $\alpha \in E^* \setminus \{0\}$ et $c \in \mathrm{Ker}\,\alpha \setminus \{0\}$. On considère toujours $u = \tau(\alpha, c)$.

1. Montrer que l'ensemble
$$\mathrm{SL}(E) := \{u \in \mathrm{GL}(E) \mid \det(u) = 1\}$$
est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ (bonus : montrer que c'est un sous-groupe distingué).
2. Soit $(v_1, \ldots, v_{n-2})$ une famille libre de H telle que $(v_1, \ldots, v_{n-2}, a)$ soit une base de H et soit $x_0 \in E$ tel que $\alpha(x_0) = 1$ (pourquoi un tel x_0 existe ?). Déterminer la matrice de u dans la base $(v_1, \ldots, v_{n-2}, a, x_0)$ de E.
3. En déduire que $u \in \mathrm{SL}(E)$.
4. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u \neq \mathrm{Id}_E$ et il existe un hyperplan H u-stable avec $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et $u_{E/H} = \mathrm{Id}_{E/H}$. Montrer que u est une transvection avec $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = H$. (*indication : utiliser l'exercice 1*).
5. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $u \neq \mathrm{Id}_E$ et il existe une droite D u-stable avec $u_{|D} = \mathrm{Id}_D$ et $u_{E/D} = \mathrm{Id}_{E/D}$. Montrer que u est une transvection avec $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = D$. (*indication : utiliser l'exercice 1*).

Exercice 5 (**Générateurs de** $\mathrm{SL}(E)$)**.** Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie. Dans cet exercice, on montre que les transvections engendrent le groupe $\mathrm{SL}(E)$. On procède par récurrence sur E (le cas $\dim E = 1$ est trivial). On suppose $\dim E \geqslant 2$. Soit $u \in \mathrm{SL}(E)$, on cherche a décomposer u comme un produit de transvections.

1. Soient $x, y \in E$ tous les deux non nuls.
   a) Montrer que, si $x, y \in E$ sont non colinéaires, alors il existe une transvection τ telle que $\tau(x) = y$.
   b) En déduire qu'il existe toujours un produit p d'au plus deux transvections tel que $p(x) = y$.
2. Soit $c \in E \setminus \{0\}$, montrer que quitte à composer par des transvections, on peut supposer que $u(c) = c$.
3. On pose $D = \mathrm{Vect}(c)$. On pose $\pi : E \to E/D$ la projection canonique. On pose également $\overline{u} \in \mathrm{End}(E/D)$ l'endomorphisme induit par u. Montrer que $\overline{u}$ est inversible et de déterminant 1.
4. En déduire que $\overline{u}$ est une composée de transvections, disons $\overline{u} = \tau(\overline{\alpha_1}, \overline{c_1}) \cdots \tau(\overline{\alpha_r}, \overline{c_r})$.
5. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $\alpha_i := \overline{\alpha_i} \circ \pi$ et $c_i \in E$ tel que $\pi(c_i) = \overline{c_i}$. Montrer que $v := \tau(\alpha_1, c_1) \cdots \tau(\alpha_r, c_r)$ est de déterminant 1 et tel que $\overline{v} = \overline{u}$ et $v(c) = u(c)$.
6. Montrer que $v^{-1}u$ est une transvection (*indication : utiliser la question 5 de l'exercice 4*). Conclure.