TD 2 - Dualité

† *Premiers exemples*

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^3$,

1. Soit $f \in E^*$ telle que $f(4,2,0) = 2, f(1,2,-3) = -7$ et $f(0,2,5) = -1$, déterminer $f(x,y,z)$.
2. Montrer que le formes linéaires $f_1(x,y,z) = 2x+4y+3z$, $f_2(x,y,z) = y+z$, $f_1(x,y,z) = 2x+2y-z$ forment une base de E^*, quelle est sa base antéduale ?

Exercice 2. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $\alpha, \beta \in E^* \setminus \{0\}$, montrer que $\operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$ si et seulement si il existe $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tel que $\beta = \lambda\alpha$.

Exercice 3. Soit k un corps de caractéristique 0, et $\alpha \in k$. Montrer que la famille $1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \ldots, (X-\alpha)^n$ forme une base de $E_n := k_n[X]$. Déterminer sa base duale.

Exercice 4. On considère $E := \mathcal{M}_n(k)$ l'espace des matrices carrées de taille n sur un corps k.

1. Montrer que l'application $f : E \times E \to k$ envoyant (A, B) sur $\operatorname{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que f est non dégénérée.
3. En déduire que toute forme linéaire sur E s'écrit sous la forme $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ pour une certaine matrice A.

† *Orthogonalité au sens des formes linéaires*

Exercice 5. Soit E un k-espace vectoriel, on rappelle que pour $A \subset E$ et $F \subset E^*$, on note

$$A^o = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\} \text{ et } {}^oF = \{x \in E \mid \forall \varphi \in F, \varphi(x) = 0\}.$$

1. Montrer que A^o (resp. ${}^oF$) est un sous-espace vectoriel de E^* (resp. de E).
2. Montrer les assertions suivantes :
   a) Si $A \subset A' \subset E$, alors $A'^o \subset A^o$.
   b) Si $B \subset B' \subset E^*$, alors ${}^oB' \subset {}^oB$.
   c) Si $A \subset E$, alors $A^o = (\operatorname{Vect} A)^o$.
   d) Si $B \subset E^*$, alors ${}^oB = {}^o(\operatorname{Vect} B)$.
3. On suppose que E est de dimension finie, et que $A \leqslant E$ est un sous-espace vectoriel de E, montrer que $\dim A + \dim A^o = \dim E$ et que ${}^o(A^o) = A$.
   (Remarque, on a de même si E est de dimension finie, et que $B \leqslant E^*$ est un sous-espace vectoriel de E^*, $\dim B + \dim {}^oB = \dim E^*$ et $({}^oB)^o = B$).

Exercice 6. Soient E un k-espace vectoriel, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E, et $\Phi : E \to k^p$ définie par $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x))$.

1. Montrer que, si Φ est surjective, alors la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est libre.
2. Réciproquement, on suppose que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est libre. On note $F \subset k^p$ l'image de Φ. En considérant F^o, montrer que Φ est surjective.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

1. Soit $x \in E$, on note $\sigma_x : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\sigma_x(y) = \langle x, y \rangle$. Montrer que $\sigma_x \in E^*$.
2. Montrer que l'application $\Sigma : x \mapsto \sigma_x$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels de E vers E^*.
3. On rappelle que, pour F un sous-espace vectoriel de E, on pose $F^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$. Montrer que $\Sigma(F^\perp) = F^o$.

Exercice 8. Soient E et F deux k-espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie) et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que $(\operatorname{Im} f)^o = \operatorname{Ker}({}^t f)$.
2. En déduire que si E et F sont de dimension finie, f et ${}^t f$ ont même rang et que par conséquent, pour $A \in \mathcal{M}_{p,n}(k)$, A a le même rang que sa transposée.
3. Contre exemple en dimension infinie : Considérons $k[X]$, et $\partial : k[X] \to k[X]$ envoyant $P(X)$ sur le polynôme dérivé $P'(X)$.
   a) Soit $\varphi \in k[X]^*$ une forme linéaire, montrer que $\operatorname{Ker} {}^t\partial(\varphi)$ contient les polynômes constants.
   b) En déduire que ∂ est surjective et pas ${}^t\partial$.

† *Dualité et dimension*

Exercice 9. Soit $E = k^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans k, et $F = k^{(\mathbb{N})}$ le sous espace formé des suites nulles à partir d'un certain rang.

1. On considère, pour $i \in \mathbb{N}$, la suite e^i définie par $(e^i)_j = \delta_{i,j}$ (le symbole de Kronecker). Montrer que la famille $\{e^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ forme une base de F, pourquoi ne forme-t-elle pas une base de E ?
2. Montrer que F^* est isomorphe à E.
3. Bonus : Montrer que F est isomorphe à $k[X]$ comme k-espace vectoriel.

Exercice 10. (Dimension du dual)
Soit E un k-espace vectoriel, muni d'une base $\{b_i\}_{i \in I}$ (une telle base existe toujours grâce à l'axiome du choix, quitte à avoir $|I| = \infty$ si E est de dimension infinie). Par définition, tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$$

où les λ_i sont nuls sauf pour $i \in I' \subset I$ un ***sous-ensemble fini***.

1. Montrer que l'application b_k^* envoyant x sur λ_k est une forme linéaire.
2. Montrer que les $\{b_i^*\}_{i \in I}$ forment une famille libre de E^*.
3. Si E est de dimension finie, en déduire que les $\{b_i^*\}_{i \in I}$ forment une base de E^*
4. Si E est de dimension infinie, montrer que la somme infinie $\varphi := \sum_{i \in I} b_i^*$ est encore une forme linéaire bien définie sur E. En déduire que $\dim E^* > \dim E$, et que ces deux espaces ne peuvent pas être isomorphes (*indication : montrer que φ n'appartient pas à* $\operatorname{Vect}(\{b_i\}_{i \in I})$).

Exercice 11. (Bidual)
Soit E un k-espace vectoriel

1. Pour $x \in E$, on définit $\operatorname{ev}_x : E^* \to k$ par

$$\forall \varphi \in E^*,\ \operatorname{ev}_x(\varphi) := \varphi(x)$$

   (ev_x est l'évaluation en x des formes linéaires). Montrer que ev_x est une forme linéaire sur E^* (donc un élément du bidual E^{**}).

2. Montrer que l'application $\mathrm{ev} : E \to E^{**}$ envoyant x sur ev_x est une application linéaire.
3. Montrer que ev est injective.
4. Si E est de dimension finie, en déduire que ev est un isomorphisme de E vers son bidual.
5. Si E est de dimension infinie, montrer que ev n'est jamais surjective (on pourra utilser la conclusion de l'exercice 10).

(Bonus : Si E et F sont de dimension finie, montrer que les isomorphisme $E \simeq E^{**}$ et $F \simeq F^{**}$ permettent d'identifier f à ${}^t({}^t f)$ pour une application linéaire $f : E \to F$)

† *À la rescousse de l'analyse numérique !*

Exercice 12 (Lagrange)**.** Soient k un corps, $E = k[X]$ vu comme k-espace vectoriel,et $E_n := k_n[X]$ le k-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

1. Quelle est la dimension de E_n ?
2. Pour tout $x \in k$, on pose $\varphi_x : E \to k$ donnée par $\varphi_x(P) := P(x)$. Montrer que $\varphi_x \in E^*$.
3. Montrer que, si $x_1, \ldots, x_m$ sont distincts, alots $(\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_m})$ est une famille libre de E^*.
4. On note encore φ_x la restriction de φ_x à E_n. Montrer que si k a au moins $m+1$ éléments distincts, alors E_n^* est engendré par les $\varphi_x, x \in k$. Cette condition est elle nécessaire.
5. Sous l'hypothèse précédente, quelle est la base antéduale de la famille $(\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi_{x_m})$?

Exercice 13 (Formules d'intégration)**.**
Considérons l'espace $E := \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-1,1]$, il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension infninie, dont il est inenvisageable d'exhiber une base.
On considère la forme linéaire ϕ définie sur E par

$$\phi(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt.$$

Dans un monde parfait, on pourrait exprimer cette forme linéaire sur une base convenable de E^*, mais nous ne sommes pas dans un monde parfait.
Restreignons notre étude au sous espace F de E formé des polynômes de degré au plus 2 (que l'on voit comme des fonctions continues sur $[-1,1]$).

1. Montrer que les formes linéaires

$$\begin{cases} \varphi_{-1} : P \mapsto P(-1), \\ \varphi_0 : P \mapsto P(0), \\ \varphi_1 : P \mapsto P(1). \end{cases}$$

   Forment une base de F^* (*indication : regarder l'exercice précédent !*). En calculer la base antéduale P_{-1}, P_0, P_1.
2. Calculer $\phi(P_{-1}), \phi(P_0), \phi(P_1)$ et en déduire la formule suivante :

$$\forall P \in F, \int_{-1}^{1} P(t)dt = \frac{1}{3}\left(P(-1) + 4P(0) + P(1)\right).$$

Autrement dit, $\phi = \frac{1}{3}(\varphi_{-1} + 4\varphi_0 + \varphi_1)$ sur F, cette formule peut-être ensuite étendue en une forme linéaire sur E, dont on espère qu'elle est "assez proche" de la forme ϕ (vu qu'elles coïncident sur le sous-espace F).