# TD 1 - Modules

† *Premiers exemples*

**Exercice 1.** Soit $k$ un corps. Parmi les sous-ensemble suivants de $k[X]$, lesquels sont des sous-$k$-modules de $k[X]$ ?

(a) Les polynômes de degré exactement 4.

(b) Les polynômes de degré au plus 4.

(c) Les polynômes unitaires.

(d) L'ensemble $\{\text{polynômes unitaires}\} \cup \{0\}$.

(e) Les polynômes de degré pair.

**Exercice 2.** Soit $R$ un anneau commutatif, vu comme module sur lui-même.

1. Montrer que les sous-$R$-modules de $R$ sont exactement les idéaux de $R$.
2. Déterminer tous les morphismes de $R$-modules de $R$ vers $R$.
3. Que se passe-t-il si $R = k$ est un corps ?

**Exercice 3.** Soit $\varphi : M \to N$ un morphisme de $R$-modules, et soient $M', N'$ des sous-modules respectifs de $M$ et $N$. Montrer que $\varphi(M')$ est un sous-module de $N$ et que $\varphi^{-1}(N')$ est un sous-module de $M$. En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ sont des sous-modules respectifs de $M$ et de $N$.

**Exercice 4.** On considère $R = \mathbb{Z}$.

1. Justifier que $2\mathbb{Z} \subset R$ est un sous-$R$-module de $R$. Montrer que $2\mathbb{Z}$ n'admet pas de supplémentaire dans $R$.
2. On considère le $R$-module $M = \mathbb{Z}^2$. Montrer que les sous-$R$-modules $N_1 = (1,1)\mathbb{Z}$ et $N_2 = (2,3)\mathbb{Z}$ admettent des supplémentaires dans $M$.

† *Quelques situations fondamentales*

**Exercice 5.** (Modules sur les polynômes, partie 1)
Soit $k$ un corps, $E$ un $k$-espace vectoriel, et $R := k[X]$ l'anneau des polynômes à une variable.

1. Soit $u \in \operatorname{End}_k(E)$, montrer que la loi de composition
$$\begin{array}{ccc} R \times E & \longrightarrow & E \\ (P, x) & \longmapsto & P(u)(x) \end{array}$$
munit $E$ d'une structure de $R$-module.
2. Réciproquement, soit $M$ un $R$-module, montrer que $M$ est aussi un $k$-espace vectoriel et que l'application $u : v \mapsto X.v$ est un endomorphisme du $k$-espace vectoriel $M$.
3. En déduire que tout $R$-module peut s'obtenir par la construction de la question 1).
4. Montrer que pour tout $u, v \in \operatorname{End}_k(E)$, les $R$-modules associés à $(E, u)$ et $(E, v)$ sont isomorphes si et seulement si $u$ et $v$ sont semblables (i.e conjuqués par un élément de $\operatorname{GL}(E)$).

**Exercice 6.** (Modules sur les polynômes, partie 2)
On reprend $k$ un corps, $E$ un $k$-espace vectoriel, et $R := k[X]$. Soit $(E, u)$ un $R$-module monogène, c'est-à-dire que $E = R.v$ pour un certain $v \in E$, on suppose également que $E$ est de dimension finie comme $k$-espace vectoriel.

1. En considérant l'application $P \mapsto P.v$, montrer que $(E, u) \simeq R/(P_0)$ pour un certain polynôme unitaire $P_0 \in k[X]$.
2. Montrer que $P_0$ est le polynôme minimal de l'endomorphisme $u$.
3. Montrer que $E$, vu comme $k$-espace vectoriel, admet pour base la famille $\{u^i(v)\}_{i \in [\![0,n-1]\!]}$, où $n = \deg P_0$.
4. En déduire que $P_0$ est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $u$.

**Exercice 7.**

1. Soit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lisses (i.e. infiniment dérivables) de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
   a) Montrer que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-module (=$\mathbb{R}$-espace vectoriel) de dimension infinie.
   b) Montrer que l'application $\partial : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ envoyant $f$ sur sa dérivée $f'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   c) Quel est le noyau de $\partial$ ? Son image ?
2. Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $\Omega \to \mathbb{C}$ qui sont holomorphes sur $\Omega$.
   a) Montrer que $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie.
   b) Montrer que l'application $\partial : \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$ envoyant $f$ sur sa dérivée $f'$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Quel est son noyau ?

   (*L'image de $\partial$ est a priori difficile à déterminer, nous verrons en analyse complexe des théorèmes garantissant l'existence de primitives holomorphes*).

**Exercice 8.** (Algèbres)
Soient $R$ et $S$ deux anneaux commutatifs et unitaires.

1. Soit $f : R \to S$ un morphisme d'anneaux. Montrer que l'on munit $S$ d'une structure de $R$-module en posant

$$\forall r \in R, s \in S,\ r.s := f(r)s$$

   On dit que $S$ est une $R$-***algèbre*** (associative, commutative, unitaire).
2. Montrer que $R[X]$ est une $R$-algèbre. Est-ce un $R$-module libre ? Si oui, peut-on en exhiber une base ?
3. Montrer que $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
4. Montrer que $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre. (*On peut montrer que $\mathbb{R}$ est de dimension infinie en tant que $\mathbb{Q}$-module*).
5. Montrer que tout anneau commutatif unitaire est muni d'une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre.

**Exercice 9.** (Mon premier foncteur)
Soient $S$ et $R$ deux anneaux, et $f : R \to S$ un morphisme d'anneaux.

1. Soit $M$ un $R$-module. Montrer que poser $r.m := f(r).m$ munit $M$ d'une structure de $R$-module.
2. Si $\varphi : M \to N$ est un morphisme de $S$-modules, montrer que la construction précédente fait de $\varphi$ un morphisme de $R$-modules.
3. Soit $k$ un corps, et soit $(E, u)$ un $k[X]$-module. Montrer qu'en appliquant la construction ci-dessus au $k[X]$-module $(E, u)$, on retrouve le $k$-espace vectoriel $E$.
4. Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$. Quelle est la dimension de $E$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
5. Qu'obtient-on en appliquant les résultats précédents au cas $R = \mathbb{Z}$ ?