Correction TD Hors série

Exercice 1.

1. Naïvement, on veut définir $\overline{u}$ par $\overline{u}(x+F) = u(x) + F$, “l'image de la classe à gauche est la classe à gauche de l'image”. On peut vérifier à la main que cette définition est correcte et donne bien une application linéaire, mais on peut aussi appliquer la propriété universelle des quotients.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & E \arrow[r, two heads, "\pi"] & E/F \\
E/F \arrow[urr, dashed, "\exists ! \overline{u}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Considérons $\pi \circ u : E \to E \to E/F$, il s'agit d'une application linéaire (par composition), de plus, pour $f \in F$, on a $u(f) \in F$ (par hypothèse) et $\pi(u(f)) = 0$, donc $F \subset \operatorname{Ker} \pi \circ u$. Par propriété universelle des quotients, il existe alors une unique application linéaire $\overline{u} : E/F \to E/F$ telle que $\overline{u} \circ \pi = \pi \circ u$. Autrement dit, pour $x + F = \pi(x) \in E/F$, on a

$$\overline{u}(x+F) = \overline{u}(\pi(x)) = \pi(u(x)) = u(x) + F,$$

ce qui était bien la définition que l'on voulait au départ.

2. L'application $\pi : E \to E/F$ induit un morphisme de $k[X]$-modules $\pi : (E, u) \to (E/F, \overline{u})$ car $\overline{u} \circ \pi = \pi \circ u$ par définition de $\overline{u}$. Le noyau de π est $(F, u_{|F})$ et π et surjectif. Le résultat est alors une application du théorème d'isomorphisme.

3. Premièrement, la famille $\overline{\mathcal{B}}$ est génératrice dans E/F. Soit $y \in E/F$, comme π est surjectif, il existe $x \in E$ tel que $x + F = \pi(x) = y$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i + \sum_{i=r+1}^{n} \mu_i b_i$$

On a alors

$$y = \pi(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi(a_i) + \sum_{i=r+1}^{n} \mu_i \pi(b_i) = \sum_{i=r+1}^{n} \mu_i \pi(b_i)$$

Tout élément $y \in E/F$ s'écrit donc comme une combinaison linéaire de $\overline{\mathcal{B}}$. Ensuite, par le théorème du rang appliqué à π, on a

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} \pi + \dim \operatorname{Im} \pi = \dim F + \dim E/F$$

Donc $\overline{\mathcal{B}}$ a pour cardinal $n - r = \dim E/F$, comme il s'agit d'une famille génératrice, il s'agit aussi d'une base.

4. Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on a $u(a_i) \in F$ car $a_i \in F$. Donc $u(a_i)$ est une combinaison linéaire des seuls a_i (les coefficients en b_j sont tous nuls). Les r premières colonnes de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ (qui expriment les $u(a_i)$) sont $\binom{A}{0}$, où $A = Mat_{\mathcal{F}}(u_{|F})$. Ensuite, pour $i \in [\![r+1, n]\!]$, on a

$$u(b_i) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i,k} a_k + \sum_{k=r+1}^{n} \mu_{i,k} b_k \Rightarrow \overline{u}(\pi(b_i)) = \pi(u(b_i)) = \sum_{k=r+1}^{n} \mu_{i,k} \pi(b_k)$$

Les $\mu_{i,k}$ sont donc les coefficients de la matrice $Q = Mat_{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{u})$, on trouve donc que les $n - r$ dernières colonnes de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ sont $\binom{*}{Q}$, et on a bien le résultat voulu.

5. On pose $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,r]\!]}$ et $Q = (q_{i,j})_{i,j \in [\![r+1,n]\!]}$. Par définition, pour $j \in [\![1, r]\!]$, on a

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{i,j} e_j \in F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r)$$

Comme $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de F, on a bien $u(f) \in F$ pour tout $f \in F$. Ensuite, pour $j \in [\![r+1, n]\!]$, on a $u(b_j) = f_j + \sum_{i=r+1}^{n} q_{i,j} b_i$ pour un certain $f \in F$, on a alors

$$\overline{u}(\pi(b_j)) = \sum_{i=r+1}^{n} q_{i,j} \pi(b_i)$$

c'est à dire $Q = Mat_{\overline{\mathcal{E}}}(\overline{u})$.

Exercice 2.

1. Le résultat est évident pour $n = 1$ par définition, ensuite, on a

$$T^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme annoncé. 2. La matrice T est triangulaire supérieure, son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux, ici 1. 3. La seule valeur propre de T est 1 (de multiplicité 2), si T était diagonalisable, elle serait donc semblable à I_2, or la seule matrice semblable à I_2 est I_2, et $T \neq I_2$, donc T n'est pas diagonalisable. 4. Par définition, on a

$$T - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $(T - I_2)^2 = 0$, autrement dit, $\mathrm{Im}(T - I_2) \subset \mathrm{Ker}(T - I_2)$.

Exercice 3.

1. Soit $x \in E$, on a

$$x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow u(x) = x \Leftrightarrow \alpha(x)c = 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = 0$$

Ensuite, pour $x \in E$, on a $u(x) - x = \alpha(x)c \in \mathrm{Vect}(c)$, et comme α est non nulle, on peut prendre x_0 tel que $\alpha(x_0) = 1$, et $u(x_0) - x_0 = c$, donc $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(c)$ (et pas seulement inclus dedans).

2. Soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\tau(\alpha, c)(\tau(\alpha, -c)(x)) &= \tau(\alpha, c)(x - \alpha(x)c) \\
&= x - \alpha(x)c + \alpha(x - \alpha(x)c)c \\
&= x - \alpha(x)c + \alpha(x)c - \alpha(x)\alpha(c)c \\
&= x
\end{aligned}$$

Donc $\tau(\alpha, c) \circ \tau(\alpha, -c) = \mathrm{Id}_E$. En remplaçant c par $-c$, on trouve

$$\tau(\alpha, -c) \circ \tau(\alpha, -(-c)) = \mathrm{Id}_E$$

Et donc $\tau(\alpha, c)$ et $\tau(\alpha, -c)$ sont inverses l'un de l'autre.

3. Soit $h \in H$, par hypothèse, on a $\alpha(h) = 0$ et $u(h) = h + \alpha(h)c = h$, donc $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et H est en particulier u-invariant. De la même manière, soit $\lambda c \in D$. Comme $c \in H$, on a $u(\lambda c) = \lambda u(c) = \lambda c$, donc $u_{|D} = \mathrm{Id}_D$ et D est en particulier u-invariante.

4. Soit $x + H \in E/H$, on a

$$\overline{u}(x + H) = u(x) + H = x + \alpha(x)c + H = x + H$$

car $\alpha(x)c \in D \subset H$. De même, pour $x + D \in E/D$, on a

$$\overline{u}(x + D) = u(x) + D = x + \alpha(x)c + D = x + D$$

Exercice 4.

1. Le déterminant $\mathrm{GL}(E) \to k^*$ est un morphisme de groupes (car $\det(AB) = \det(A)\det(B)$), et par définition, $\mathrm{SL}(E)$ est le noyau de ce morphisme. Il s'agit donc d'un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(E)$.

2. Comme α est non nulle, on peut considérer x tel que $\alpha(x) \neq 0$, on pose alors $x_0 = \frac{1}{\alpha(x)}x$ qui est tel que $\alpha(x_0) = 1$. Pour $i \in [\![1, n-2]\!]$, on a $u(v_i) = v_i$ car $v_i \in H$. De même, on a $u(c) = c$, et enfin $u(x_0) = x_0 + c$. La matrice de u dans la base considérée est donc une matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

où T est la matrice de l'exercice 2.

3. La matrice donnée à la question précédente est triangulaire supérieure avec uniquement des 1 sur la diagonale, d'où $\det(u) = 1$ et $u \in \mathrm{SL}(E)$.

4. D'après l'exercice 1, dans une base adaptée $(b_1, \dots, b_n)$, la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & * \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $c = a_1 b_1 + \cdots a_{n-1} b_{n-1}$. Soit α une forme linéaire de noyau H et telle que $\alpha(b_n) = 1$. On a $u = \tau(\alpha, c)$, en effet, pour $i \leqslant n-1$, on a $u(b_i) = b_i = \tau(\alpha, c)(b_i)$ et $u(b_n) = b_n + c = \tau(\alpha, c)(b_n)$.

5. D'après l'exercice 1, dans une base adaptée $(b_1, \dots, b_n)$, la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_1 & * \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Soit α une forme linéaire telle que $\alpha(b_1) = 0$, $\alpha(b_i) = a_i$. On a $u = \tau(\alpha, b_1)$, en effet, on a $u(b_1) = b_1 = \tau(\alpha, b_1)$ et, pour $i \geqslant 2$, on a $u(b_i) = b_i + a_i c = \tau(\alpha, c)(b_i)$.

Exercice 5.

1. a) On pose $c = y - x$, qui est non nul car x et y sont non colinéaires. Soit ensuite α une forme linéaire telle que $\alpha(x) = 1$, on a alors $\tau(\alpha, c)(x) = x + c = y$.
b) Comme E est de dimension $\geqslant 2$, on peut considérer un vecteur $z \notin \mathrm{Vect}(x) = \mathrm{Vect}(y)$. Par la question précédente, on peut considérer deux transvections τ_1 et τ_2 telles que $\tau_1(x) = z$ et $\tau_2(z) = y$. On a alors $\tau_2 \circ \tau_1(x) = y$ comme annoncé.

2. Soit $y = u(c)$, par la question précédente, il existe v un produit de transvections telle que $v(y) = c$, on a alors $v \circ u(c) = c$, on remplace u par $v \circ u$.

3. C'est une conséquence de l'exercice 1, comme la matrice de u peut s'écrire comme une matrice triangulaire par blocs, on trouve que $1 = \det(u) = \det(u_{|D})\det(\overline{u}) = \det(\overline{u})$.

4. C'est l'hypothèse de récurrence.

5. Par définition, on a $\overline{\alpha_i}(c) = \overline{\alpha_i} \circ \pi(c) = \overline{\alpha_i}(0) = 0$, donc c est un point fixe de toutes les transvections $\tau(\alpha_i, c_i)$ et donc de v. Ensuite, on a évidemment $\overline{\tau(\alpha_i, c_i)} = \tau(\overline{\alpha_i}, \overline{c_i})$ et donc $\overline{u} = \overline{v}$.

6. On a $\overline{v^{-1}u} = \overline{u}^{-1}\overline{u} = \mathrm{Id}_{E/D}$, et $v^{-1}u(c) = c$, donc on applique la question 5 de l'exercice 4, il existe une transvection τ telle que $v\tau = u$, d'où le résultat : u est un produit de transvections.