Correction TD 3

Exercice 1.
1. On sait que $\Psi : E \times F \to E \boxtimes F$ est une application bilinéaire. Par définition du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $\psi : E \otimes F \to E \boxtimes F$ telle que $\psi(v \otimes w) = \Psi(v, w) = v \boxtimes w$ pour $v \in E, w \in F$. De la même manière, comme $\Phi : E \times F \to E \otimes F$ est une application bilinéaire, il existe une unique application linéaire $\phi : E \boxtimes F \to E \otimes F$ telle que $\phi(v \boxtimes w) = \Phi(v, w) = v \otimes w$ pour $v \in E, w \in F$.
Mais alors, $\psi \circ \phi$ est une application linéaire de $E \otimes F$ dans lui même telle que

$$\forall v \in E, w \in F,\ \phi \circ \psi(v \otimes w) = \phi(v \boxtimes w) = v \otimes w.$$

Comme les tenseurs purs engendrent $E \otimes F$, on a $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{E \otimes F}$. De même, on a $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{E \boxtimes F}$, donc ϕ et ψ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

2. On pose considère la fonction $E \times F \to F \otimes E$ qui envoie (v, w) sur $w \otimes v \in F \otimes E$. On vérifie facilement que cette fonction est bilinéaire. Par définition du produit tensoriel, il existe alors une unique fonction linéaire $\varphi : E \otimes F \to F \otimes E$ telle que $\varphi(v \otimes w) = w \otimes v$ pour $v \in E, w \in F$. De la même manière, il existe une unique fonction linéaire $\psi : F \otimes E \to E \otimes F$ telle que $\psi(w \otimes v) = v \otimes w$ pour $v \in E, w \in F$. Il est clair que $\varphi \circ \psi$ (et $\psi \circ \varphi$) induisent l'identité sur les tenseurs purs. Comme ces derniers engendrent $E \otimes F$ $(F \otimes E)$, on obtient que φ et ψ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

3. La partie compliquée consiste à construire les morphismes qui vont donner l'isomorphisme de ces deux espaces vectoriels. On considère d'abord l'application

$$\begin{array}{ccccc} E \times F \times G & \longrightarrow & E \times (F \otimes G) & \longrightarrow & E \otimes (F \otimes G) \\ (v, w, x) & \longmapsto & (v, w \otimes x) & \longmapsto & v \otimes (w \otimes x) \end{array}$$

que l'on appelle P. Par construction, l'application P est une application 3-linéaire (linéaire en chacune de ses 3 variables). Si l'on fixe $x \in G$, alors l'application $P_x : (v, w) \mapsto v \otimes (w \otimes x)$ est une application bilinéaire $E \otimes F \to E \otimes (F \otimes G)$ (car P est 3-linéaire). Par définition du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $\widetilde{P_x} : E \otimes F \to E \otimes (F \otimes G)$ définie sur les tenseurs purs par

$$\widetilde{P_x}(v \otimes w) = v \otimes (w \otimes x).$$

À présent, on considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & (E \otimes F) \times G & \longrightarrow & E \otimes (F \otimes G) \\ & A \times x & \longmapsto & \widetilde{P_x}(A) \end{array}$$

(Attention : A est un élément quelconque de $E \otimes F$, ce n'est donc pas forcément un tenseur pur). Il s'agit d'une application bilinéaire :

— Comme $\widetilde{P_x}$ est linéaire pour tout x, on trouve que f est linéaire par rapport à sa première variable.
— Il reste à montrer que f est linéaire par rapport à sa seconde variable. Soient donc $x, y \in G$ et $\lambda, \mu \in k$. On doit montrer que

$$\forall A \in E \otimes F,\ f(A, \lambda x + \mu y) = \lambda f(A, x) + \mu f(A, y)$$

Par définition, pour $v \in E, w \in F$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda f(v \otimes w, x) + \mu f(v \otimes w, y) &= \lambda \widetilde{P_x}(v \otimes w) + \mu \widetilde{P_y}(v \otimes w) \\
&= \lambda(v \otimes (w \otimes x)) + \mu(v \otimes (w \otimes y)) \\
&= v \otimes (\lambda(w \otimes x)) + v \otimes (\mu(w \otimes y)) \\
&= v \otimes (w \otimes (\lambda x)) + v \otimes (w \otimes (\mu y)) \\
&= v \otimes ((w \otimes (\lambda x)) + (w \otimes (\mu y))) \\
&= v \otimes (w \otimes (\lambda x + \mu y)) \\
&= \widetilde{P_{\lambda x + \mu y}}(v \otimes w)
\end{aligned}$$

Mais, comme $\widetilde{P_{\lambda x + \mu y}}$ est unique à respecter la propriété ci-dessus, on trouve bien que

$$\widetilde{P_{\lambda x + \mu y}} = \lambda \widetilde{P_x} + \mu \widetilde{P_y}$$

et donc f est bien linéaire en sa seconde variable.

Donc, par définition du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : (E \otimes F) \otimes G \to E \otimes (F \otimes G)$ telle que $\widetilde{f}(A \otimes x) = \widetilde{P_x}(A)$. En particulier, sur les tenseurs purs, on a

$$\widetilde{f}((v \otimes w) \otimes x) = \widetilde{P_x}(v \otimes w) = v \otimes (w \otimes x).$$

En faisant le même travail dans l'autre sens, on trouve qu'il existe une application linéaire bien définie $\widetilde{g} : E \otimes (F \otimes G) \to (E \otimes F) \otimes G$, qui sur les tenseurs purs vaut

$$\widetilde{g}(v \otimes (w \otimes x)) = (v \otimes w) \otimes x$$

On vérifie immédiatement que $\widetilde{g} \circ \widetilde{f}$ et $\widetilde{f} \circ \widetilde{g}$ est l'identité, et on a le résultat.

4. On commence par considérer l'application

$$\begin{array}{rccc}
f : & E \times (F_1 \oplus F_2) & \longrightarrow & (E \otimes F_1) \oplus (E \otimes F_2) \\
& (v, (w_1, w_2)) & \longmapsto & (v \otimes w_1, v \otimes w_2)
\end{array}$$

On montre que f est une application bilinéaire

— Soient $v, v' \in E$, $\lambda, \mu \in k$, on a

$$\begin{aligned}
f(\lambda v + \mu v', (w_1, w_2)) &= ((\lambda v + \mu v') \otimes w_1, ((\lambda v + \mu v') \otimes w_2) \\
&= (\lambda v \otimes w_1 + \mu v' \otimes w_1, \lambda v \otimes w_2 + \mu v' \otimes w_2) \\
&= (\lambda v \otimes w_1, \lambda v \otimes w_2) + (\mu v' \otimes w_1, \mu v' \otimes w_2) \\
&= \lambda(v \otimes w_1, v \otimes w_2 +) + \mu(v' \otimes w_1, v' \otimes w_2) \\
&= \lambda f(v, (w_1, w_2)) + \mu f(v', (w_1, w_2))
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire par rapport à sa première variable.

— Soient $w_1, w_1' \in F_1, w_2, w_2' \in F_2$, $\lambda, \mu \in k$, on a

$$\begin{aligned}
f(v, \lambda(w_1, w_2) + \mu(w_1', w_2')) &= f(v, (\lambda w_1 + \mu w_1', \lambda w_2 + \mu w_2')) \\
&= \big(v \otimes (\lambda w_1 + \mu w_1'), v \otimes (\lambda w_2 + \mu w_2')\big) \\
&= \big(\lambda(v \otimes w_1) + \mu(v \otimes w_1'), \lambda(v \otimes w_2) + \mu(v \otimes w_2')\big) \\
&= \lambda(v \otimes w_1, v \otimes w_2) + \mu(v \otimes w_1', v \otimes w_2') \\
&= \lambda f(v, (w_1, w_2)) + \mu f(v, (w_1', w_2'))
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire par rapport à sa seconde variable.

Ainsi, il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : E \otimes (F_1 \oplus F_2)$ telle que

$$\widetilde{f}(v \otimes (w_1, w_2)) = (v \otimes w_1, v \otimes w_2).$$

Réciproquement, on considère l'application

$$\begin{array}{cccc} g_1 : & E \times F_1 & \longrightarrow & E \otimes (F_1 \oplus F_2) \\ & (v, w_1) & \longmapsto & v \otimes (w_1, 0) \end{array}$$

On vérifie facilement que g_1 est bilinéaire, et elle induit $\widetilde{g_1} : E \otimes F_1 \to E \otimes (F_1 \oplus F_2)$ envoyant un tenseur pur $(v \otimes w_1)$ sur $(v \otimes (w_1, 0))$. De la même manière, on construit $g_2 : E \otimes F_2 \to E \otimes (F_1 \oplus F_2)$ envoyant un tenseur pur $v \otimes w_2$ sur $(v \otimes (0, w_2)$. Le couple $\widetilde{g} := (\widetilde{g_1}, \widetilde{g_2}) : E \otimes F_1 \oplus E \otimes F_2 \to E \otimes (F_1 \oplus F_2)$ envoie le couple de tenseurs purs $((v \otimes w_1), (v \otimes w_2))$ sur $v \otimes (w_1, w_2)$. On vérifie facilement que $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Exercice 2. (Base d'un produit tensoriel)
1. C'est évident car e_i^* et f_j^* sont respectivement des applications linéaires, et car le produit dans k est bilinéaire.
- Soient $v, v' \in E$ et $w \in F$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(v + v', w) &= e_i^*(v + v')f_j^*(w) \\ &= (e_i^*(v) + e_i^*(v')f_j^*(w) \\ &= e_i^*(v)f_j^*(w) + e_i^*(v')f_j^*(w) \\ &= \varphi_{i,j}(v, w) + \varphi_{i,j}(v', w) \end{aligned}$$

- Soient $v \in E$ et $w, w' \in F$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(v, w + w') &= e_i^*(v)f_j^*(w + w') \\ &= e_i^*(v)(f_j^*(w) + f_j^*(w')) \\ &= e_i^*(v)f_j^*(w) + e_i^*(v)f_j^*(w') \\ &= \varphi_{i,j}(v, w) + \varphi_{i,j}(v, w') \end{aligned}$$

- Soient $v \in E$, $w \in F$ et $\lambda \in k$, on a

$$\varphi_{i,j}(rv, w) = e_i^*(rv)f_j^*(w) = re_i^*(v)f_j^*(w) = r\varphi_{i,j}(v, w) = \varphi_{i,j}(v, rw).$$

Ensuite, par définition des familles duales, on a

$$\varphi_{i,j}(e_k, f_\ell) = e_i^*(e_k)f_j^*(f_\ell) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell} = \delta_{(i,j),(k,\ell)}$$

2. Par définition du produit tensoriel, il existe une unique application linéaire $\widetilde{\varphi_{i,j}} : E \otimes F \to k$ telle que

$$\forall v \in E, w \in F,\ \widetilde{\varphi_{i,j}}(v \otimes w) = \varphi_{i,j}(v, w)$$

on a alors par définition $\widetilde{\varphi_{i,j}}(e_k \otimes f_\ell) = \delta_{(i,j),(k,\ell)}$.
3. Soit une combinaison linéaire nulle :

$$x = \sum_{(k,\ell) \in I \times J} \alpha_{(k,\ell)}(e_k \otimes f_\ell) = 0$$

où les coefficients $\alpha_{(k,\ell)}$ sont presque tous nuls. Pour $i, j \in I \times J$, on a

$$0 = \widetilde{\varphi_{i,j}}(x) = \sum_{(k,\ell) \in I \times J} \alpha_{(k,\ell)}\widetilde{\varphi_{i,j}}(e_k \otimes f_\ell) = \sum_{(k,\ell) \in I \times J} \alpha_{(k,\ell)}\delta_{(i,j),(k,\ell)} = \alpha_{(i,j)}.$$

donc tous les $\alpha_{(i,j)}$ sont nuls et la famille $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est libre.

4. Soit $u \otimes v$ un tenseur pur de $E \otimes F$. Comme (e_i) et (f_j) sont respectivement des bases de E et F, on peut écrire u et v comme des combinaisons linéaires

$$u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{j \in J} \mu_j f_j$$

où les λ_i et les μ_j sont presques tous nuls. On a alors

$$u \otimes v = \left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) \otimes \left(\sum_{j\in J} \mu_j f_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j)$$

(et les $(\lambda_i \mu_j)$ sont presques tous nuls). Donc $u \otimes v$ est une combinaison linéaire des $e_i \otimes f_j$ comme annoncé. Comme les tenseurs purs forment une famille génératrice de $E \otimes F$, ceci montre que la famille $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est génératrice : par la question précédente c'est une base de $E \otimes F$.

5. Le produit des bases canoniques respectives de k^n et k^m donne une base de $k^n \otimes k^m$ de cardinal nm. Cet espace est donc isomorphe à tous les k-espaces vectoriels de dimension mn, en particulier k^{mn} et $\mathcal{M}_{n,m}(k)$.

6. Des bases respectives (comme k-espaces vectoriels) de $k[X]$ et $k[Y]$ sont données par $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(Y^j)_{j\in\mathbb{N}}$. Une base de $k[X] \otimes_k k[Y]$ est alors donnée par $(X^i \otimes Y^j)_{(i,j)\in I\times J}$. Cette base est clairement en bijection avec la base $(X^i Y^j)_{(i,j)\in I\times J}$ de $k[X,Y]$. Cette bijection induit un isomorphisme entre ces deux espaces, isomorphisme envoyant le tenseur pur $(P(X) \otimes Q(Y))$ sur le polynôme $P(X)Q(Y)$: Les produits de deux polynômes à 1 variable correspondent aux tenseurs purs de $k[X] \otimes k[Y]$.

Exercice 3. Une k-base de $k[X]$ est donnée par les monômes : $1, X, X^2, \ldots$. On sait qu'une L base de $L \otimes k[X]$ est donnée par les tenseurs purs $1_L \otimes 1, 1_L \otimes X, 1_L \otimes X^2, \ldots$. Cette dernière base est évidemment en bijection avec la L-base naturelle de $L[X]$: $1, X, X^2, \ldots$.

Exercice 4. 1. Par définition du produit tensoriel sur $\mathbb{Z}$, on a

$$n.\left(\frac{a}{b} \otimes k\right) = \frac{a}{b} \otimes (nk) = \frac{a}{b} \otimes 0 = 0$$

2. Soit $(\frac{a}{b} \otimes k)$ un tenseur pur de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \otimes \overline{k} &= 1.\left(\frac{a}{b} \otimes k\right) \\ &= \frac{n}{n}.\left(\frac{a}{b} \otimes \overline{k}\right) \\ &= \frac{a}{bn} \otimes n\overline{k} \\ &= \frac{a}{bn} \otimes 0 = 0 \end{aligned}$$

3. On sait que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par les tenseurs purs : un élément s'écrit comme

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{a_i}{b_i} \otimes n_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i.0 = 0$$

D'où $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0\}$ (tous ses éléments sont nuls).
Le fait de tensoriser par $\mathbb{Q}$ nous a "forcé à rendre n inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$", mais comme on avait déjà $n = 0$ dans cet anneau, on a "rendu 0 inversible" ce qui force $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à être l'anneau nul.
Plus généralement, tensoriser par un corps va "tuer la torsion", c'est a dire annuler la partie de torsion d'un module (ce qui a ses avantages et ses inconvénients...)