Correction séance 4 (16 février)

Exercice 1.
1. La forme f se décompose sur la base duale de la base canonique : $f = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$, on a alors

$$\begin{cases} f(4,2,0) = 4a + 2b = 2, \\ f(1,2,-3) = a + 2b - 3c = -7, \\ f(0,2,5) = 2b - 5c = 1. \end{cases}$$

C'est un système linéaire (d'inconnues a, b, c). Pour le résoudre, on calcule l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$M^{-1} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 16 & -10 & -6 \\ -5 & 20 & 12 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 16 & -10 & -6 \\ -5 & 20 & 12 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et $f = 2e_1^* - 3e_2^* + e_3^*$, autrement dit $f(x,y,z) = 2x - 3y + z$.

2. Par définition, on a $f_1 = 2e_1^* + 4e_2^* + 3e_3^*$, $f_2 = e_2^* + e_3^*$, $f_3 = 2e_1^* + 2e_2^* - e_3^*$, la matrice de passage de la famille f_i à la base canonique duale e_i^* est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est inversible (son déterminant est -4), donc les f_i forment bien une base de E^*.
Soit $e \in E$, on sait que $(f_1(e), f_2(e), f_3(e))$ est donné par Me, où

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

trouver la base antéduale revient à trouver a, b, c tels que $Ma = (1,0,0)$, $Mb = (0,1,0)$, $Mc = (0,0,1)$, autrement dit, a, b, c sont les colonnes de M^{-1} on calcule donc

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

la base antéduale de f_i est donc $a = \frac{1}{4}(3,-2,2)$, $b = \frac{1}{4}(-10,8,-4)$ et $c = \frac{1}{4}(-1,2,-2)$.

Exercice 3. Le polynôme $(X-\alpha)^m$ est unitaire de degré m, la famille considérée est donc une famille de polynômes échelonnée de taille n, qui forme donc une base de E_n. Ensuite, on sait que

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\ell}(X-\alpha)^m = \begin{cases} \frac{m!}{(m-\ell)!}(X-\alpha)^{m-\ell} & \text{si } \ell < m, \\ m! = \ell! & \text{si } \ell = m, \\ 0 & \text{si } \ell > m. \end{cases}$$

Autrement dit, l'évaluation en α de ce polynôme vaut $\ell!$ si $\ell = m$, et 0 sinon. Ainsi, $\mathrm{ev}_\alpha \circ (\frac{\partial}{\partial X})^{\ell}$ est une forme linéaire sur E_n, qui vaut $\ell!$ en $(X-\alpha)^{\ell}$ et 0 en $(X-\alpha)^m$ pour $m \neq \ell$. Comme k est de caractéristique 0, $\ell!$ est inversible pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, et la base duale de $(X-\alpha)^{\ell}$ est donnée par

$$\frac{1}{\ell!}\,\mathrm{ev}_\alpha \circ \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\ell},\ \ell \in [\![0,n]\!]$$

Exercice 6. 1. Supposons que Φ est surjective. On a $\operatorname{Im}\Phi = k^p$, autrement dit, pour tout $(u_1,\dots,u_p) \in k^p$, il existe $x \in E$ tel que $\varphi_i(x) = u_i$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Soit ensuite une combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i = 0$$

avec $\lambda_i \in k$ pour $i \in [\![1,p]\!]$. Fixons $j \in [\![1,p]\!]$ quelconque, on peut par hypothèse considérer $x_j \in E$ tel que $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$. On a alors

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(x_j) = \lambda_j.$$

Donc $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, et la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ est donc libre.

2. Si $\operatorname{Im}\Phi \neq k^p$, alors $\operatorname{Im}\Phi$ est contenue dans un certain hyperplan H, noyau d'une forme linéaire non nulle α. On a donc $\alpha \circ \varphi = 0$, ce qui donne une combinaison linéaire nulle en les φ_i, et comme $\alpha \neq 0$, cette combinaison linéaire est non triviale : les φ_i ne forment pas une famille libre.

Exercice 7. 1. On sait que $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire, en particulier, l'application σ_x est linéaire et $\sigma_x \in E^*$.

2. On sait que $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire, en particulier, l'application Σ est linéaire. Ensuite, soit $x \in \operatorname{Ker}\Sigma$, on a $\sigma_x(y) = 0$ pour tout $y \in E$. En particulier, $\sigma_x(x) = \|x\|^2 = 0$, ce qui entraîne $x = 0$. On a donc $\operatorname{Ker}\Sigma = \{0\}$. Comme E est de dimension finie, cela entraîne que Σ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

3. Soit $\varphi \in E^*$, on pose $x = \Sigma^{-1}(\varphi)$, de sorte que $\varphi = \sigma_x$ (et x est unique avec cette propriété). On a

$$\begin{aligned} \varphi \in F^o &\Leftrightarrow \sigma_x \in F^o \\ &\Leftrightarrow \forall y \in F,\ \sigma_x(y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in F^{\perp} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 8.
1. Soit $\varphi \in F^*$, on a

$$\varphi \in \operatorname{Ker}{}^t f \Leftrightarrow \varphi \circ f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi \in (\operatorname{Im} f)^o$$

2. Le rang de f est la dimension de $\operatorname{Im} f$. Le rang de ${}^t f$ est la dimension de $\operatorname{Im}{}^t f$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im}{}^t f = \dim F - \dim \operatorname{Ker}({}^t f) = \dim F - \dim(\operatorname{Im} f)^o = \dim \operatorname{Im} f$, d'où le résultat. La conclusion sur les

matrices découle du fait que le rang de f est celui de sa matrice dans une base quelconque, et du fait que la matrice de ${}^t f$ est la transposée de la matrice de f (dans les bases duales correspondantes).

3.a) On a ${}^t\partial(\varphi) = \varphi \circ \partial$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P')$, si P est constant, $P' = 0$ et ${}^t\partial(\varphi)(P) = 0$, d'où le résultat.
b) On sait que ∂ est surjective car tout polynôme admet des primitives (qui sont encore des polynômes), en revanche, $\mathrm{Im}\,{}^t\partial$ ne contient que des formes linéaires s'annulant sur les constante, elle n'est donc pas égale à $k[X]^*$.