Correction séance 10 (12 avril)

† *Invariants de similitudes et décomposition de Frobenius*

Exercice 10.
On rapelle que les invariants de similitudes de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(k)$ sont les facteurs invariants non triviaux de la matrice $M - X\,\mathrm{Id} \in \mathcal{M}_n(k[X])$ (au signe près). On calcule donc les diviseurs élémentaires de la matrice

$$M - X\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{pmatrix}$$

Pour cela, on utilise l'algorithme de pivot de Gauss modifié.

$$\begin{pmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \begin{pmatrix} 3-X & 2 & -2 \\ -1 & -X & 1 \\ 0 & 1-X & 1-X \end{pmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \begin{pmatrix} 3-X & 4 & -2 \\ -1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + (3-X)L_2 \begin{pmatrix} 0 & (X-1)^2 & 1-X \\ -1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \begin{pmatrix} 0 & (X-1)^2 & 0 \\ -1 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - (1+X)C_1 \begin{pmatrix} 0 & (X-1)^2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \begin{pmatrix} 0 & (X-1)^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow -C_1 \begin{pmatrix} 0 & (X-1)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{pmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow -C_3 \begin{pmatrix} 0 & (X-1)^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (X-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (X-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \\ 0 & (X-1)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \leftrightarrow C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & (X-1)^2 \end{pmatrix}$$

Les invariants de similitude de M sont donc $(X-1),(X-1)^2,$. On en déduit en particulier que le polynôme minimal de M est $(X-1)^2$ et que son polynôme caractéristique est $(X-1)^3$.

Exercice 11.

1. On commence par exprimer les facteurs irréductibles de X^4, ceux-ci ne dépendent en l'occurrence pas du corps choisi, et sont évidemment X, X, X, X. Le polynôme minimal de u contient au moins une copie de chaque facteur irréductible, autrement dit c'est X, X^2, X^3 ou bien X^4.

— Si $\mu_u = X^4$, alors $\mu_u = \chi_u$, u est cyclique et X^4 est l'unique terme dans la suite des invariants de similitude de u.

— Si $\mu_u = X^3$, alors l'avant dernier invariant de similitude doit être tel que $X|P_{n-1}|X^3$, et $P_{n-1}X^3 = \chi_u = X^4$. La seule solution est $P_{n-1}(X) = X$, et la suite des invariants de similitude de u est (X, X^3).

— Si $\mu_u = X^2$, alors l'avant dernier invariant de similitude doit être tel que $X|P_{n-1}|X^2$. On a donc soit $P_{n-1}(X) = X^2$, auquel cas $P_{n-1}(X)\mu_u(X) = \chi_u(X)$ et la suite des invariants de similitude de u est (X^2, X^2), soit $P_{n-1}(X) = X$, auquel cas $P_{n-2}(X) = X$ et la suite des invariants de similitude de u est (X, X, X^2).

— Si $\mu_u = X$, alors l'avant dernier invariant de similitude doit être tel que $X|P_{n-1}|X$, donc $P_{n-1}(X) = X$. En appliquand le même raisonnement à $P_{n-2}, P_{n-3}, \ldots$, on trouve que la suite des invariants de similitude de u est (X, X, X, X). De plus, $\mu_u = X$ équivaut à $u = 0$, ce cas est le cas de la matrice nulle.

Autre façon peut-être plus rapide : Les invariants de similitude possible sont paramétrés par les partitions de 4 (la puissance de X donnant χ_u). Les partitions de 4 sont

$$4 \qquad 3+1 \qquad 2+2 \qquad 2+1+1 \qquad 1+1+1+1$$

Ces partitions donnent respectivement les invariants

$$(X^4) \qquad (X, X^3) \qquad (X^2, X^2) \qquad (X, X, X^2) \qquad (X, X, X, X)$$

Qui est bien la liste des invariants donnée plus haut.

2. Ici, c'est un peu différent car la décomposition en facteurs irréductibles de χ_u dépend du corps k choisi.
Sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, X^2+X+1 est irréductible car il n'a pas de racines et est de degré 2 (ses racines complexes sont j et j^2) donc l'unique facteur irréductible de χ_u est X^2+X+1. Les décompositions possibles sont alors paramétrées par les partitions de 2.

- La partition (2) donne le cas d'un endomorphisme cyclique, avec pour unique invariant de similitude $\chi_u = \mu_u = (X^2+X+1)^2$.
- La partition $(1,1)$ donne les invariants de similitudes (X^2+X+1, X^2+X+1).

Sur $\mathbb{C}$, c'est différent : on a $X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$ où $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les facteurs irréductibles de χ_u sont donc $X-j$ et $X-j^2$. Comme dans le cas des nombres premiers et des groupes abéliens, les suites d'invariants possibles sont paramétrées par les couples de partitions de 2 (une partition pour les facteurs $X-j$, l'autre pour $X-j^2$).

- Le couple $((2),(2))$ donne la suite $((X-j)^2(X-j^2)^2)=((X^2+X+1)^2)$ que nous avons déjà traité (ça reste une possibilité sur $\mathbb{C}$, mais c'était déjà une possibilité sur $\mathbb{Q}$).
- Le couple $((2),(1+1))$ donne la suite $((X-j)^2(X-j^2),(X-j^2))=((X^2+X+1)(X-j),(X-j^2))$.
- Le couple $((1+1),(2))$ donne la suite $((X-j)(X-j^2)^2,(X-j))=((X^2+X+1)(X-j^2),(X-j))$
- Le couple $((1+1),(1+1))$ donne la suite $((X^2+X+1),(X^2+X+1))$ que nous avons aussi déjà rencontré précédemment.

3. Sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de M est donné par $(X-j)(X-j^2)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$, il s'agit d'un polynôme scindé à racines simples, donc égal au polynôme minimal de M. Autrement dit sur tous les corps donnés, les polynômes caractéristiques et minimaux de M sont égaux, le seul polynôme apparaissant dans les invariants de similitude de M est donc $(X^2+X+1)(X^2-2)=X^4+X^3-X^2-2X-2$, la réduite de Frobenius de M est donc

$$\mathcal{C}(X^4+X^3-X^2-2X-2)=\begin{pmatrix}0&0&0&-2\\1&0&0&-2\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

Exercice 12.

1. On calcule $-\det(A-X\,\mathrm{Id})$.

$$\begin{vmatrix}2-X&m-1&-1\\1-m&m-X&m-1\\1&m-1&-X\end{vmatrix}$$

$$L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3:\begin{vmatrix}m-X&m-1&-1\\m-X&m-X&m-1\\m-X&m-1&-X\end{vmatrix}$$

$$L_2\leftarrow L_2-L_1:\begin{vmatrix}m-X&m-1&-1\\0&1-X&m\\m-X&m-1&-X\end{vmatrix}$$

$$L_3\leftarrow L_3-L_1:\begin{vmatrix}m-X&m-1&-1\\0&1-X&m\\0&0&1-X\end{vmatrix}$$

Cette dernière matrice étant triangulaire supérieure, on déduit que $\chi_{A_m}(X)=(X-1)^2(X-m)$ comme annoncé.

2. On a

$$(A_m-m)(A_m-1)=\begin{pmatrix}2-m&m-1&-1\\1-m&0&m-1\\1&m-1&-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&m-1&-1\\1-m&m-1&m-1\\1&m-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m(1-m)&0&m(m-1)\\0&0&0\\m(1-m)&0&m(m-1)\end{pmatrix}$$

Cette matrice est nulle si et seulement si $m=0$ ou $m=1$. On sait que le polynôme minimal de A_m doit avoir les mêmes racines que son polynôme caractéristique.

— Si $m=0$, le polynôme caractéristique de A_0 est $X(X-1)^2$. Comme le polynôme minimal doit avoir les mêmes racines que le polynôme caractéristique, on a $\mu_{A_0}=X(X-1)$ ou $\mu_{A_0}=X(X-1)^2$. Le calcul précédent nous montre que $(A_0-0)(A_0-1)=0$, donc $X(X-1)$ est un polynôme annulateur de A_0. Il s'agit donc de son polynôme minimal.

— Si $m = 1$, le polynôme minimal peut être $(X-1), (X-1)^2$ ou $(X-1)^3 = \chi_{A_1}$. Le premier cas est impossible car $A_1 \neq \mathrm{Id}$. En revanche, le calcul précédent montre que $(A_1 - 1)^2 = 0$, donc le polynôme $(X-1)^2$ est annulateur pour A_1. Il s'agit donc de son polynôme minimal.

— Si $m \neq 1$ et $m \neq 0$, le polynôme minimal de A_m est $(X-m)(X-1)$ ou $(X-m)(X-1)^2$. D'après nos calculs, $(X-m)(X-1)$ n'est pas annulateur de A_m si $m \notin \{0,1\}$, donc le polynôme minimal de A_m est $(X-m)(X-1)^2 = \chi_{A_m}$.

3. Si $m = 0$, le polynôme minimal de A_0 est $X(X-1)$, et son polynôme caractéristique est $X(X-1)^2$. Comme $\chi_{A_0}/\mu_{A_0} = X-1$ est irréductible, on trouve que la suite des invariants de similitude de A_0 est $(X-1, X(X-1))$. Si $m = 1$, le polynôme minimal de A_1 est $(X-1)^2$, et son polynôme caractéristique est $(X-1)^3$. Comme $\chi_{A_1}/\mu_{A_1} = X-1$ est irréductible, on trouve que la suite des invariants de similitude de A_1 est $(X-1, (X-1)^2)$. Si $m \neq 1, 0$, alors les polynômes caractéristiques et minimaux de A_m sont égaux, A_m est cyclique, avec pour unique invariant de similitude $\chi_{A_m} = (X-m)(X-1)^2$.

Exercice 13.
1.a) On rappelle que $M.e_i$ est toujours la i-ème colonne de la matrice M, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, cette colonne est le vecteur de base canonique e_{i+1}. On constate d'ailleurs que

$$M.e_n = \begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix} = -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i$$

b). Soit $Q = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i = \sum_{i=1}^{n} b_{i-1} X^{i-1}$ un polynôme de degré $\leqslant n-1$. Si $Q(M) = 0$, on a en particulier $Q(M).e_1 = 0$. Par ailleurs, on calcule

$$Q(M).e_1 = \sum_{i=1}^{n} b_{i-1} M^{i-1}.e_1 = \sum_{i=1}^{n} b_{i-1} e_i$$

Il s'agit là d'une combinaison linéaire sur la base $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, si elle est nulle, c'est que tous ses coefficients (les b_i) sont nuls, autrement dit $Q = 0$.
c). On a

$$P(M).e_1 = M^n.e_1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i M^i.e_1 = M.e_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1} = -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} e_i = 0$$

d). Premièrement, montrons que P est annulateur de M. Il faut montrer que $P(M).e_i = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. On l'a déjà montré pour $i = 1$, pour $i \geqslant 2$, on a

$$P(M).e_i = P(M) M^{i-1}.e_1 = M^{i-1} P(M).e_1 = M^{i-1}.0 = 0$$

car les polynômes en M commutent les uns avec les autres (puisque les puissances d'une matrice fixée commutent entre elles). On sait maintenant que P est annulateur, et la question b) nous apprend que P a un degré minimal avec cette propriété : P est bien le polynôme minimal de M.

2. Le polynôme caractéristique de M doit être de degré n et divisé par le polynôme minimal, comme le polynôme minimal de M est lui aussi de degré n (et unitaire...), les polynômes minimaux et caractéristique de M sont égaux.

3. Comme les polynômes minimaux et caractéristiques de M sont égaux, il s'agit de l'unique invariant de similitude de M : le polynôme P.

Exercice 14.
1. La décomposition de Frobenius de M dans k est donnée par une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que PMP^{-1} soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

où $P_r|P_{r-1}|...|P_1$. On a de plus que P_1 est le polynôme minimal de M sur k, et le produit des P_i est le polynôme caractéristique de M sur k.
En voyant les P_i et P comme à coefficients dans K, on constate que la réduite de Frobenius de M sur k est candidate pour être "une réduite de Frobenius" de M sur K, on conclut par unicité de la réduction de Frobenius.
2. Les polynômes caractéristiques et minimaux sont calculable à partir de la seule donnée de la réduite de Frobenius.
3. La réduite de Frobenius caractérise la classe de similitude : deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même réduite de Frobenius.