Correction séance 1 (19 janvier)

† *Premiers exemples*

Exercice 1.
(a) Ce n'est pas un k-module : il ne contient pas 0 car celui-ci n'est pas un polynôme de degré 4.
(b) Notons M l'ensemble des polynômes de degré au plus 4. Premièrement, M contient 0. Ensuite, pour P, Q de degré au plus 4, et $\lambda, \mu \in k$, on sait que $\lambda P + \mu Q$ est aussi de degré au plus 4 car

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$$

Donc M est stable par combinaison linéaire : il s'agit d'un sous-k-module de $k[X]$.
(c) Ce n'est pas un k-module : il ne contient pas 0.
(d) Si on ajoute 0 ça se complique : si $k \neq \mathbb{F}_2$, alors k contient un élément λ différent de 1 et de 0. Dans ce cas, le polynôme λX est une combinaison linéaire de polynômes unitaire qui n'est pas unitaire : l'ensemble étudié n'est pas un sous-module de $k[X]$. Si $k = \mathbb{F}_2$, l'ensemble étudié est alors égal à $k[X]$, il s'agit donc bien d'un k-module.
(e) Ce n'est pas un sous-module : la différence de deux polynômes de degré pair peut ne pas être de degré pair : par exemple prenons $X^2 + X$ et X^2, qui sont de degré pair.

$$(X^2 + X) - X^2 = X$$

ce dernier polynôme n'est pas de degré pair.

Exercice 2. 1. On montre en fait que l'on a deux définitions équivalentes de sous-module d'un module. Soient R un anneau commutatif unitaire, M un R-module, et $N \subset M$ un sous-R-module.
Définition 1 : On dit que N est un sous-module de M si c'est un sous-groupe de M, et si N est ***absorbant***

$$\forall r \in R, n \in N, r.n \in N$$

Définition 2 : On dit que M est un sous-module de M si c'est un sous-groupe de M, et si N est ***stable par combinaison R-linéaire***

$$\forall x, y \in N,\ \lambda, \mu \in R,\ \lambda.x + \mu.y \in N$$

Soit $N \subset M$ un sous-module pour la première définition. On sait que N est un sous-groupe de M, et on doit montrer que N est stable par combinaison linéaire. Soient $x, y \in N$ et $\lambda, \mu \in R$. Par absorbance de N, on a $\lambda.x \in N$ et $\mu.y \in N$. Comme N est un sous-groupe de M, la somme $\lambda.x + \mu.y$ est alors dans N, d'où le résultat.

Réciproquement, soit $N \subset M$ un sous-module pour la deuxième définition. On sait que N est un sous-groupe de M, et on doit montrer que N est absorbant. Soient $n \in N$ et $r \in R$. Comme N est stable par combinaison linéaire, on a $r.n + 0_R.0_N = r.n \in N$, qui est donc absorbant.

Revenons maintenant à la question. En utilisant la première définition, on obtient que $I \subset R$ est un sous-R-module de R si et seulement si I est un sous-groupe de R absorbant pour la multiplication, autrement dit un idéal.

2. Pour tout $r \in R$, on a $r = r.1_R$. Si $f : R \to R$ est un morphisme de R-module, on doit avoir

$$f(r) = f(r.1_R) = rf(1_R)$$

Donc f ne dépend que de $f(1_R)$. Par ailleurs, pour tout $r_0 \in R$, en posant $f(r) = rr_0$, on obtient bien un morphisme de R-module car

$$f(r.r' + r'') = (r.r' + r'')r_0 = rr'r_0 + r''r_0 = rf(r') + f(r'')$$

Donc les morphismes de modules $f : R \to R$ sont en bijection avec R (par le choix de $f(1_R)$).
(On voit une grosse différence avec les morphismes d'anneaux.)

3. Soit k un corps. Les sous-k-modules de k sont les sous-k-espaces vectoriels du k espace vectoriel k. Comme k est un k-espace vectoriel de dimension 1, ses seuls sous-espaces vectoriels sont $\{0\}$ et k. Autrement dit, les seuls idéaux d'un corps k sont $\{0\}$ et k. Par la question 2, on retrouve que les applications k-linéaires de k dans k est $\mathcal{M}_1(k) = k$.