TD 3 – Modules sur les anneaux principaux

Sauf mention contraire explicite, A désignera toujours un anneau principal.

I) Questions de cours, exemples et contre-exemples

Exercice 1. —
Etant donné·e·s une matrice $M \in \mathrm{M}_{n,p}(A)$ et un entier $r \geq 1$, on note $I_r(M)$ l'idéal engendré par les mineurs de taille r de M. Démontrer la validité des assertions suivantes.

1. $I_r(M) = I_r({}^tM)$.
2. $I_{r+1}(M) \subset I_r(M)$.
3. Pour toute matrice $N \in M_{p,q}(A)$, $I_r(MN) = I_r(M) \cap I_r(N)$.
4. Pour toutes matrices $P \in \mathrm{GL}_n(A)$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(A)$, $I_r(PMQ) = I_r(M)$.

Exercice 2. —
Soient M et N deux A-modules libres de type fini. Démontrer que pour toute application A-linéaire non nulle $u : M \to N$, il existe une base $\mathcal{B}_M$ de M sur A et une base $\mathcal{B}_N$ de N sur A telles que la matrice de u dans ces bases soit de la forme

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & d_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r \geq 1$ entier naturel et $d_1, \dots, d_r$ éléments non nuls de A ne dépendant que de u tels que d_i divise d_{i+1} pour tout indice i.

Exercice 3. —
Etant donné un corps $\mathbb{K}$, est-ce que (X, Y) est un sous-$\mathbb{K}[X, Y]$-module libre de type fini ?

Exercice 4. —
Démontrer que le sous-$\mathbb{Z}$-module $2\mathbb{Z}$ n'admet pas de supplémentaire dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5. —
Pour tout A-module M, on note $T(M)$ l'ensemble des éléments de torsion de M et $\mathrm{Ann}(M)$ l'idéal annulateur de M.

1. Démontrer que
$$T(M) = \bigoplus_{i=1}^{r} A/d_iA \ ,$$
où $(d_iA)_{1\leq i\leq r}$ désignent les facteurs invariants (ou : invariants de Smith) de M.
2. Démontrer que $\mathrm{Ann}(M) = d_rA$.

TD 3 – Modules sur les anneaux principaux

Exercice 6. —

1. Démontrer que tout module de type fini est libre si, et seulement si, il est sans torsion.
2. Cet énoncé reste-t-il valable si l'on ne suppose plus que M est de type fini ?
3. Cet énoncé reste-t-il valable si l'on ne suppose plus que A est un anneau principal ?

Exercice 7. —
Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Démontrer que tout endomorphisme de E permet de munir naturellement E d'une structure de $K[X]$-module.
2. Notons E_u le $K[X]$-module défini sur E par $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Etant donnés $u, v \in \mathcal{L}_K(E)$, démontrer que les $K[X]$-modules E_u et E_v sont isomorphes si, et seulement si, u et v sont semblables.
3. Sous cette correspondance, à quoi correspondent :
   - ⋆ les endomorphismes de E_u ?
   - ⋆ les sous-$\mathbb{K}[X]$-modules de E_u ?
   - ⋆ les morphismes du $\mathbb{K}[X]$-module E_u ?
   - ⋆ le polynôme minimal de u sur $\mathbb{K}$?

Exercice 8. —
Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ un $\mathbb{K}$-endomorphisme de E dont le polynôme minimal est irréductible sur $\mathbb{K}$. Démontrer que tout sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire dans E qui est lui aussi stable par u.

II) Quelques calculs explicites de facteurs invariants

Exercice 9. —
Déterminer la forme normale de Smith des matrices suivantes dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 11 & 6 & 11 & 0 \\ 12 & 0 & 19 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 48 & 12 & -46 \\ 0 & 12 & 0 & -10 \\ 0 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 10. —
Déterminer la forme normale de Smith des matrices suivantes dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R}[X])$.

$$\begin{pmatrix} 1-X & 2 & X^2 \\ 0 & 1 & X+3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} X^2+X+1 & X-3 & 1 \\ -1 & X+1 & X^2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1+X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

TD 3 – Modules sur les anneaux principaux

Exercice 11. —
Déterminer la forme normale de Smith des matrices suivantes dans $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X])$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. —

1. Déterminer une base du A-module M adaptée au sous-A-module N dans les cas suivants.
   - $M = \mathbb{Z}^2$ et N est le sous-$\mathbb{Z}$-module engendré par $(2,0)$ et $(0,3)$.
   - $M = \mathbb{Z}^2$ et N est le sous-$\mathbb{Z}$-module engendré par $(3,4)$ et $(2,0)$.
   - $M = \mathbb{Z}^4$ et N est le sous-$\mathbb{Z}$-module engendré par $(10,6,7,11)$.
2. Pour chacun des cas précédents, déterminer les facteurs invariants du quotient M/N.

Exercice 13. —
Déterminer la décomposition en facteurs invariants des $\mathbb{Z}$-modules de type fini suivants.

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \; ; \; \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/95\mathbb{Z} \; ; \; (\mathbb{Z}/56\mathbb{Z})^\times \; ;$$

Exercice 14. —
Démontrer de deux manières différentes que le groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Exercice 15. —
Déterminer tous les entiers $n \geq 2$ tels que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ soit un groupe cyclique.

Exercice 16. —

1. Donner une classification des groupes abéliens d'ordre 36.
2. Donner une classification des groupes abéliens d'ordre 484.

Exercice 17. —

1. Donner une classification des groupes abéliens d'ordre 8.
2. Donner une classification des groupes abéliens d'ordre 16.
3. Donner une classification des groupes abéliens d'ordre 2^n, $n \geq 3$.

III) Quelques résultats plus généraux sur les modules libres/de type fini

Exercice 18. —
Soit $\mathbb{K}$ un corps. A l'aide du théorème de décomposition en facteurs invariants, démontrer que tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^\times$ est cyclique.

TD 3 – Modules sur les anneaux principaux

Exercice 19. —
Montrer que le groupe des racines complexes de l'unité n'est pas un groupe abélien de type fini.
Indication : On pourra essayer de raisonner par contradiction.

Exercice 20. —
Soit $\mathbb{K}$ un corps et M un $K[X]$-module de type fini. Donner une condition nécessaire et suffisante (simple) sur M pour que M soit un $K[X]$-module de torsion.

IV) Des $\mathbb{K}[X]$-modules à la réduction des endomorphismes

Exercice 21. —
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. En notant $C(Q)$ la matrice compagnon de Q, démontrer que la classe d'équivalence de $XI_n - C(Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ contient la matrice diagonale $\mathrm{diag}(Q(X), 1, 1, \ldots, 1)$.

Exercice 22. —
Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Etant donné $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, démontrer l'équivalence des assertions suivantes.
   (a) Tous les invariants de similitude de u sont de degré 1.
   (b) Le polynôme minimal de u sur $\mathbb{K}$ est de degré 1.
   (c) L'endomorphisme u est une homothétie.
   (d) L'endomorphisme u admet $\dim_K(E)$ invariants de similitude.
   (e) Le seul invariant de similitude de u est son polynôme minimal, avec multiplicité $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.
2. Déterminer les invariants de similitude d'un endomorphisme de E lorsque $\dim_{\mathbb{K}}(E) = 2$.
3. Déterminer les invariants de similitude d'un endomorphisme de E lorsque $\dim_{\mathbb{K}}(E) = 3$.

Exercice 23. —
Déterminer les invariants de similitude de $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{K})$ lorsque $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{Q}$, puis lorsque $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 24. —

1. Déterminer les invariants de similitude possibles d'un endomorphisme de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ayant pour polynôme caractéristique X^4.
2. Déterminer les invariants de similitude possibles d'un endomorphisme de $\mathbb{Q}^4$ ayant pour polynôme caractéristique X^4.
3. Déterminer les invariants de similitude possibles d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant pour polynôme caractéristique X^4.
4. Déterminer les invariants de similitude possibles d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ ayant pour polynôme caractéristique X^4.

UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023

LICENCE 3 – ALGÈBRE LINÉAIRE AVANCÉE R. ABDELLATIF ET O. GARNIER

TD 3 – Modules sur les anneaux principaux

Exercice 25. —
Reprendre les questions de l'exercice précédent en remplaçant X^4 par $(X^2 + X + 1)^2$.

Exercice 26. —
Etant donnés a et b deux éléments distincts d'un corps $\mathbb{K}$, donner la décomposition de Frobenius de la matrice diagonale $\mathrm{diag}(a, b)$. Ce résultat reste-t-il valable si l'on suppose $a = b$?

Exercice 27. —
Etant donné un paramètre réel m, on considère l'élément suivant de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$N_m := \begin{pmatrix} 2 & m-1 & 1 \\ 1-m & m & m-1 \\ 1 & m-1 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de N_m.
2. Calculer le polynôme minimal de N_m en fonction de la valeur du paramètre m.
3. Déterminer les invariants de similitude de N_m en fonction de la valeur du paramètre m.

Exercice 28. —
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 1$ un entier. Démontrer que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

Exercice 29. —
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \geq 1$ un entier et L une extension du corps $\mathbb{K}$ (i.e. un corps contenant $\mathbb{K}$ comme sous-corps). Démontrer que deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables dans $\mathrm{M}_n(L)$ si, et seulement si, elles le sont dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
Indication : On pourra commencer par étudier le comportement de la décomposition de Frobenius par extension de corps.

Exercice 30. —
Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Etant donné un K-endomorphisme u de E, on définit le *commutant de* u comme l'ensemble des K-endomorphismes de E qui commutent avec u :

$$\mathcal{C}(u) := \{v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \mid u \circ v = v \circ u\} .$$

1. Démontrer que $\mathcal{C}(u)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre contenant $\mathbb{K}[u] := \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.