TD 1bis - Modules, le retour

† *Indispensables*

Exercice 1. (Mon premier foncteur)
Soient S et R deux anneaux. On rappelle qu'une structure de ***R-algèbre*** sur S est équivalente à la donnée d'un morphisme d'anneaux $f : R \to S$. L'anneau S est alors en particulier un R-module via $r.s := f(r)s$. On prend également M un S-module.

1. Montrer que poser $r.m := f(r).m$ munit M d'une structure de R-module.
2. Si $\varphi : M \to N$ est un morphisme de S-modules, montrer que la construction précédente fait de φ un morphisme de R-modules.
3. Qu'obtient-on en appliquant les résultats précédents au cas $R = \mathbb{Z}$?

Exercice 2. (Modules sur une algèbre de polynômes)
Soit k un corps, E un k-espace vectoriel, et $R := k[X]$ l'anneau des polynômes à une variable.

1. Soit $u \in \mathrm{End}_k(E)$, montrer que la loi de composition

$$\begin{array}{ccc} R \times E & \longrightarrow & E \\ (P, x) & \longmapsto & P(u)(x) \end{array}$$

   munit E d'une structure de R-module.
2. Réciproquement, soit M un R-module, montrer que M est aussi un k-espace vectoriel et que l'application $u : v \mapsto X.v$ est un endomorphisme du k-espace vectoriel M.
3. En déduire que tout R-module peut s'obtenir par la construction de la question (1).
4. Montrer que pour tout $u, v \in \mathrm{End}_k(E)$, les R-modules associés à (E, u) et (E, v) sont isomorphes si et seulement si u et v sont semblables (i.e conjuqués par un élément de $\mathrm{GL}(E)$).
5. On suppose maintenant que (E, u) est un R-module monogène, c'est-à-dire que $E = R.v$ pour un certain $v \in E$, on suppose également que E est de dimension finie comme k-espace vectoriel.
   a) En considérant l'application $P \mapsto P.v$, montrer que $(E, u) \simeq R/(P_0)$ pour un certain polynôme unitaire $P_0 \in k[X]$.
   b) Montrer que P_0 est le polynôme minimal de l'endomorphisme u.
   c) Montrer que E, vu comme k-espace vectoriel, admet pour base la famille $\{u^i(v)\}_{i \in [\![0, n-1]\!]}$, où $n = \deg P_0$.
   d) En déduire que P_0 est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u.

† *Comment découpe-t-on un module ?*

Exercice 3. Soit $R = \mathbb{Z}$, on considère le R-module $M = \mathbb{Z}^2$. Dans chacun des cas suivants, vérifier si le sous-module N admet un supplémentaire.

$$N = (1, 1)\mathbb{Z} \quad N = (2, 3)\mathbb{Z} \quad N = (6, 1)\mathbb{Z}$$

Exercice 4. Un R-module M est dit ***simple*** si il est non nul et si il n'admet pas de sous-module propre : tout sous-module N de M est égal à $\{0\}$ ou a M.

1. Montrer que, si k est un corps, les k-modules simples sont exactement les espaces vectoriels de dimension 1.
2. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est premier, est un $\mathbb{Z}$-module simple.
3. Soit M un R-module simple, montrer que l'annulateur (cf TD1 exercice 9) I de M est un idéal maximal de R.
4. Montrer que M est isomorphe à R/I en tant que R-module.
5. Montrer le *Lemme de Schur* : Soit $\varphi : M \to M'$ un morphisme entre deux modules simples. Alors φ est soit le morphisme nul, soit un isomorphisme.

† *Propriétés universelles*

Exercice 5. (Propriété universelle du produit)
Soient M et N deux R-modules, on considère le produit direct $M \times N$, muni des projections canoniques $p_1, p_2 : M \times N \to M, N$ définies par $p_1(m,n) = m$ et $p_2(m,n) = n$.

1. Montrer que, pour tout R-module E, muni de deux morphismes $u : E \to M$ et $v : E \to N$, il existe un unique morphisme $\varphi : E \to M \times N$ tel que $p_1 \circ \varphi = u$ et $p_2 \circ \varphi = v$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[dr, "v"] & \\ M & M \times N \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & N \end{tikzcd}$$

2. Soit P un autre R-module, déduire de la question précédente une bijection

$$\mathrm{Hom}_R(P, M \times N) \approx \mathrm{Hom}_R(P, M) \times \mathrm{Hom}_R(P, N)$$

Exercice 6. (Propriété universelle du quotient)
Soient E un R-module et F un sous-module de E, on pose $\pi : E \to E/F$ la projection canonique.
Soit M un autre R-module, et $p : E \to M$ un morphisme tel que $F \subset \operatorname{Ker} p$.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme $\varphi : E/F \to M$ tel que $\varphi \circ \pi = p$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & M \\ E/F \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

2. Soit P un autre R-module, déduire de la question précédente une bijection

$$\mathrm{Hom}_R(E/F, P) \approx \{p \in \mathrm{Hom}_R(E, M) \mid p(F) = 0\}$$

Exercice 7. (Propriété universelle du conoyau)
Soit $f : M \to N$ un morphisme de R-modules, on appelle ***conoyau*** de f (noté $\operatorname{Coker} f$) le quotient $N/\operatorname{Im} f$ (on note π la projection canonique $N \to N/\operatorname{Im} f$.

1. Montrer que $\pi \circ f = 0$
2. Soit $p : N \to P$ un morphisme de R-modules tel que $p \circ f = 0$, montrer qu'il existe un unique morphisme de R-modules $\varphi : \operatorname{Coker} f \to P$ tel que $\varphi \circ \pi = p$ (propriété universelle du conoyau)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & & P \end{tikzcd}$$

(*indication : on pourra utiliser la propriété universelle du quotient*).