UPJV – UFR des Sciences 2022 - 2023

Licence 3 – Algèbre linéaire avancée — R. Abdellatif et O. Garnier

TD 1 – Modules sur un anneau commutatif : quelques généralités

---

Dans toute cette feuille, A désigne un anneau commutatif non nul.

I) Manipulation des premières notions : (sous-)modules et applications linéaires

Exercice 1. — Mise en jambes : preuve de quelques résultats du cours —

1. Démontrer que le produit cartésien de deux A-modules est encore un A-module.
2. Démontrer que les sous-A-modules de A sont exactement ses idéaux.
3. Démontrer que les $\mathbb{Z}$-modules sont exactement les groupes abéliens.
4. Démontrer que si A est un corps, les A-modules sont exactement les A-espaces vectoriels.
5. Etant donnés deux A-modules M et N, montrer que l'ensemble $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ des applications A-linéaires de M dans N est un A-module.
6. Etant donnée une application A-linéaire $f : M \to N$, démontrer que pour tout sous-A-module M_1 de M (resp. N_1 de N), $f(M_1)$ (resp. $f^{-1}(N_1)$) est un sous-A-module de N (resp. de M).

Exercice 2. — Mise en jambes bis : le cas des modules sur un corps —
Dans cet exercice, on désigne par $\mathbb{K}$ un corps.

1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{K}[X]$, lesquels sont des sous-$\mathbb{K}$-modules de $\mathbb{K}[X]$?
   (a) L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré 4.
   (b) L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus 4.
   (c) L'ensemble des polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   (d) L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré pair.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-module et que l'application Δ envoyant une fonction sur sa dérivée est un morphisme de $\mathbb{K}$-modules.
3. En supposant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans la question précédente, déterminer le noyau et l'image de Δ. Dans quelle mesure ces résultats s'étendent-ils au-delà du cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 3. —
Déterminer toutes les applications A-linéaires de A dans A.

Exercice 4. —
Soient M_1, M_2, M_3 des sous-A-modules de M. Est-il toujours vrai que l'on a :

⋆ $M_1 \cap (M_2 + M_3) = (M_1 \cap M_2) + (M_1 \cap M_3)$?
⋆ $M_1 \cap (M_2 + (M_1 \cap M_3)) = (M_1 \cap M_2) + (M_1 \cap M_3)$?

Exercice 5. — Ideal annulateur d'un module —
Etant donné un A-module M, on définit l'*annulateur de* M par $I_M := \{a \in A \mid aM = \{0\}\}$.

1. Démontrer que I_M est un idéal de A.
2. Déterminer l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$, puis du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
3. Déterminer l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

TD 1 – Modules sur un anneau commutatif : quelques généralités

---

Exercice 6. — Introduction aux A-algèbres —
Soit M un A-module. On dit que M est une A-*algèbre (commutative)* lorsqu'il existe une loi de composition interne $\times$ sur M qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

- ⋆ (Associativité) pour tous $m_1, m_2, m_3 \in M$, on a $m_1 \times (m_2 \times m_3) = (m_1 \times m_2) \times m_3$;
- ⋆ (Unitarité) il existe $1_M \in M$ tel que $m \times 1_M = m = 1_M \times m$ pour tout élément $m \in M$;
- ⋆ (Commutativité) pour tous $m_1, m_2 \in M$, on a $m_1 \times m_2 = m_2 \times m_1$;
- ⋆ (A-Bilinéarité) pour tous $m_1, m_2, m_3 \in M$ et tout $a \in A$, on a

$$a(m_1 \times m_2) = (am_1) \times (am_2) \text{ et } (m_1 + m_2) \times m_3 = (m_1 \times m_3) + (m_2 \times m_3) \ .$$

1. Démontrer que $\mathbb{C}$ est une A-algèbre pour $A = \mathbb{Q}$, puis pour $A = \mathbb{R}$.
2. Démontrer que $A[X]$ est une A-algèbre.
3. Démontrer que toute A-algèbre M est naturellement munie d'une structure d'anneau commutatif et que l'application $[a \in A \mapsto a.1_M \in M]$ est alors un morphisme d'anneaux.
4. Pour chacun des trois exemples ci-dessus, déterminer le morphisme d'anneaux $A \to M$ correspondant.
5. Etant donné un anneau $(M, +, \times)$ et un morphisme d'anneaux $f : A \to M$, démontrer que l'on munit naturellement M d'une structure de A-module en posant :
$$\forall\ (a, m) \in A \times M,\ a \cdot m := f(a)m\ .$$
En déduire que l'on munit ainsi M d'une structure de A-algèbre.
6. Démontrer que tout anneau commutatif est canoniquement muni d'une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre. *Indication : Que dire des morphismes d'anneaux ayant pour source $\mathbb{Z}$?*

II) Le retour des structures quotient

Exercice 7. —
Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient F et G deux sous-espace vectoriels de E.

1. Rappeler pourquoi il existe une unique structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur E/F faisant de la projection canonique $\pi_F : E \twoheadrightarrow E/F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire.
2. Supposons que G est inclus dans F. Démontrer que F/G est un sous-espace vectoriel de E/G et qu'il existe un isomorphisme naturel de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
$$(E/G)\,/\,(F/G) \simeq E/F\ .$$
3. Plus généralement, démontrer l'existence d'un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriels entre $(F+G)/G$ et $F/(F \cap G)$.

Exercice 8. —
Soit M un A-module. Etant donné un sous-A-module N, on note $\pi_N : M \twoheadrightarrow M/N$ la projection canonique. Démontrer que π_N induit une bijection entre les sous-A-modules de M/N et les sous-A-modules de M contenant N.

TD 1 – Modules sur un anneau commutatif : quelques généralités

---

Exercice 9. —
Démontrer que les énoncés des questions 2 et 3 de l'Exercice 7 restent valables pour des A-modules avec A anneau commutatif quelconque (et non nécessairement un corps).

Exercice 10. — Le retour de l'annulateur —
Soit M un A-module monogène et soit m un générateur de M.

1. Démontrer que l'application $[a \in A \mapsto am \in M]$ est une application A-linéaire surjective. Quel est son noyau ?
2. En déduire que le A-module M est isomorphe à A/I_M, où I_M est l'annulateur de M.
3. Que peut-on dire du A-module $M/I_M M$? A-t-on ici besoin de supposer M monogène ?

Exercice 11. —
Etant donné un A-module M, on dit qu'un endomorphisme de M est un *projecteur* s'il est égal à son carré. Autrement dit, c'est un élément p de $\mathrm{Hom}_A(M, M)$ qui vérifie $p \circ p = p$.

1. Donner un exemple de projecteur lorsque M est le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[X]$.
2. Supposons que p soit un projecteur de M. Démontrer que :
   (a) $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$;
   (b) $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_M)$;
   (c) $\forall\ x \in M,\ x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$;
   (d) $M = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
3. De manière analogue, peut-on étendre au cas des A-modules les propriétés des symétries d'un espace vectoriel ?

III) Modules libres, modules de type fini : quelques spécificités

Exercice 12. —
Dans la liste suivante, déterminer les A-modules de type fini, puis les A-modules libres :

⋆ le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$ entier ;
⋆ le $\mathbb{R}$-module $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 1$ entier ;
⋆ le A-module A^n pour $n \geq 1$ entier ;
⋆ le A-module $A[X]$;
⋆ le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}[i]$;
⋆ le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
⋆ le $\mathbb{R}[X, Y]$-module (X, Y).

Exercice 13. —

1. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}$ ne contient pas de famille libre sur $\mathbb{Z}$ ayant plus de deux éléments.
3. Démontrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module de type fini.

TD 1 – Modules sur un anneau commutatif : quelques généralités

---

Exercice 14. —

1. Est-il vrai que toute famille libre d'un A-module libre de type fini M peut être complétée en une base (sur A) de M ?
2. Est-il vrai que toute famille génératrice d'un A-module libre de type fini M contient une base (sur A) de M ?

III) Eléments et modules de torsion

Soit M un A-module. Un élément x de M est dit *de torsion dans* M s'il existe $a \in A$ **non nul** tel que $am = 0$. On note M_{tor} l'ensemble des éléments de torsion dans M.
On dit que M est *sans torsion* (resp. *de torsion*) lorsque $M_{\text{tor}} = \{0\}$ (resp. $M_{\text{tor}} = M$).

Exercice 15. —
Déterminer les éléments de torsion du A-module A^r pour $r \geq 1$ entier.

Exercice 16. —

1. On suppose que A est intègre. Démontrer que M_{tor} est un sous-A-module de M.
2. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus A intègre ?

Désormais, on suppose A intègre. On note $\pi_M : M \twoheadrightarrow M/M_{\text{tor}}$ la projection canonique.

Exercice 17. —
Démontrer que M_{tor} est un A-module de torsion et que M/M_{tor} est un A-module sans torsion.

Exercice 18. —
Caractériser les éléments de torsion d'un $\mathbb{Z}$-module en fonction de leur ordre.

Exercice 19. —
Supposons qu'il existe deux sous-A-modules N et P de M tels que $M = N \oplus P$.
Démontrer que l'on a alors $M_{\text{tor}} = N_{\text{tor}} \oplus P_{\text{tor}}$.

Exercice 20. —

1. Démontrer que toute application A-linéaire $f : M \to N$ vérifie $f(M_{\text{tor}}) \subset N_{\text{tor}}$.
2. Montrer que si f est un isomorphisme de A-modules entre M et N, alors f induit un isomorphisme de A-modules entre M_{tor} et N_{tor}.
3. En déduire qu'un A-module libre de type fini est nécessairement sans torsion.

Exercice 21. —
Etant donnée une application A-linéaire $f : M \to N$, démontrer qu'il existe une unique application A-linéaire $\overline{f} : M/M_{\text{tor}} \to N/N_{\text{tor}}$ telle que $\pi_N \circ f = \overline{f} \circ \pi_M$.

Exercice 22. —

1. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module sans torsion.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.
   Indication : On pourra utiliser les résultats de l'Exercice 13.