TD 5 - Modules sur un anneau principal

† *Groupes abéliens de type fini*

Exercice 1. Montrer qu'il y a (à isomorphisme près) trois groupes abéliens d'ordre 8.

Exercice 2. Déterminer tous les groupes abéliens d'ordre 36, puis tous ceux d'ordre 72 et 180.

Exercice 3. Donner les facteurs invariants ainsi que la décomposition en modules indécomposables du $\mathbb{Z}$-module

$$M = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

Exercice 4. Trouver les diviseurs élémentaires des matrices entières

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 48 & 12 & -46 \\ 0 & 12 & 0 & -10 \\ 0 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Si p et q sont deux nombres premiers entre eux, les groupes $(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/p^3q\mathbb{Z}$ peuvent ils être isomorphes ?

Exercice 6. (Groupe abélien de type infini)
On définit

$$\mu_\infty := \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, z^n = 1\} \subset \mathbb{C}$$

1. Montrer que μ_∞ est un sous-groupe (abélien) de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que $\mu_\infty \subsetneq \mathbb{S}^1$.
3. On suppose que μ_∞ est de type fini.
   a) Montrer que μ_∞ n'admet pas de partie libre (pensez à l'ordre des éléments).
   b) En déduire que μ_∞ est un groupe abélien fini.
   c) En déduire par l'absurde que μ_∞ n'est pas un groupe abélien de type fini.

Exercice 7. On note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
1. Montrer qu'il s'agit d'un groupe abélien pour la multiplication.
2. Écrire comme produits de groupes cycliques les groupes

$$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times, \quad (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times, \quad (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times, \quad (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$$

† *Facteurs indécomposables*

Exercice 8. On considère les sous-groupes de $\mathbb{Z}^2$ suivants :

$$G_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad G_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

On explicitera dans chacun des cas une base adaptée de $\mathbb{Z}^2$ au sous-groupe G_i et l'on déterminera les facteurs invariants de $\mathbb{Z}^2/G_i$.

Exercice 9. Compléter $x = (10, 6, 7, 11)$ en une base de $\mathbb{Z}^4$.

† *Invariants de similitudes et décomposition de Frobenius*
Soit $P \in \mathbb{k}[X]$ un polynôme unitaire de degré n s'écrivant

$$P(X) := X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

On définit $\mathcal{C}(P) \in \mathcal{M}_n(k)$ la ***matrice compagnon*** de P par

$$\mathcal{C}(P) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soit $P \in k[X]$ un polynôme unitaire comme ci-dessus. On pose $M := \mathcal{C}(P)$ la matrice compagnon de P.

1. a) Montrer que, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $M.e_i = e_{i+1}$.
   b) Montrer que si Q est un polynôme de degré $\leqslant n-1$, alors $Q(M) \neq 0$.
   c) Montrer que $P(M).e_1 = 0$.
   d) En déduire que P est le polynôme minimal de M.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de M est aussi égal à P.

Exercice 11. Soient $k \subset K$ deux corps, et $M \in \mathcal{M}_n(k)$.

1. Montrer que la décomposition de Frobenius de M à coefficients dans k est également la décomposition de Frobenius de M à coefficients dans K.
2. En déduire que les polynômes caractéristiques et minimaux de M dans k sont les mêmes que dans K.
3. En déduire que deux matrices de $\mathcal{M}_n(k)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(k)$ si et seulement si elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 12. (Rappel d'algèbre linéaire)
Soient $M \in \mathcal{M}_n(k)$ une matrice, λ une valeur propre de M. Pour $P \in \mathbb{k}[X]$, montrer que $P(M)(x) = P(\lambda).x$. En déduire que $\mu(m) = 0$, où μ est le polynôme minimal de M.

Exercice 13. On considère $\mathbb{k} \subset K$ deux corps, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$

1. Donner les invariants de similitude possibles pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(k^4)$ dont le polynôme caractéristique est
   $$\chi_u = X^4$$
   dans les cas suivants : $k = \mathbb{Q}, k = \mathbb{R}, k = \mathbb{C}$.
2. Même question avec $\chi_u = (X^2 + X + 1)^2$.
3. Soit la matrice
   $$\begin{pmatrix} 12 & 4 & 14 & 3 \\ -6 & -2 & -7 & -2 \\ -8 & -2 & -10 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Déterminer les invariants de similitude de M pour $\mathbb{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (*indication : le polynôme caractéristique de M est $(X^2 + X + 1)(X^2 - 2)$, ne vous embêtez pas à le recalculer*).