TD 3 - Dualité

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^3$,

1. Soit $f \in E^*$ telle que $f(4,2,0) = 2, f(1,2,-3) = -7$ et $f(0,2,5) = -1$, déterminer $f(x,y,z)$.
2. Montrer que le formes linéaires $f_1(x,y,z) = 2x+4y+3z$, $f_2(x,y,z) = y+z$, $f_1(x,y,z) = 2x+2y-z$ forment une base de E^*, quelle est sa base antéduale ?

Exercice 2. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $\alpha, \beta \in E^* \setminus \{0\}$, montrer que $\operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$ tel que $\beta = \lambda\alpha$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0, et $\alpha \in \mathbb{k}$. Montrer que la famille $1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \cdots, (X-\alpha)^n$ forme une base de $E_n := \mathbb{k}_n[X]$. Déterminer sa base duale.

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ des formes linéaires sur E, et $\varphi : E \to \mathbb{k}^p$ définie par $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x))$. Montrer que φ est surjective si et seulement si les formes linéaires $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 5. On considère $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ l'espace des matrices carrées de taille n sur un corps $\mathbb{k}$.

1. Montrer que l'application $f : E \times E \to \mathbb{k}$ envoyant (A,B) sur $\operatorname{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que f est non dégénérée.
3. En déduire que toute forme linéaire sur E s'écrit sous la forme $M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$ pour une certaine matrice A.

Exercice 6. Soient M, N deux R-modules et $\varphi : M \to N$ un morphisme de modules. On définit une application (dite ***transposée*** de f) :

$$\begin{array}{rccc} {}^tf : & N^* & \longrightarrow & M^* \\ & \varphi & \longmapsto & {}^tf(\varphi) = \varphi \circ f \end{array}$$

1. Montrer que ${}^tf$ est bien une application de N^* vers M^*, et qu'il s'agit d'un morphisme de modules.
2. Vérifier les relations suivantes :
   a) ${}^t(f+g) = {}^tf + {}^tg$.
   b) ${}^t(rf) = r\,{}^tf$ pour $r \in \mathbb{R}$.
   c) ${}^t(f \circ g) = {}^tg \circ {}^tf$.
   d) Si f est bijective (i.e f est un isomorphisme), ${}^tf$ l'est également et on a ${}^t(f^{-1}) = ({}^tf)^{-1}$.
3. On suppose que $R = \mathbb{k}$ est un corps, et que E, F sont des espaces vectoriels de dimensions finies, munis de bases respectives $\{e_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $\{\varepsilon_j\}_{j \in [\![1,m]\!]}$. On note $\{\varphi_i\}$ et $\{\psi_j\}$ leurs bases duales. On note $A = M(f)_{e_i,\varepsilon_j}$, montrer que
$$M({}^tf)_{\psi_j,\varphi_i} = {}^tA$$
4. En déduire les relations sur les matrices :
$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \quad \text{et} \quad {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

† *Orthogonalité au sens des formes linéaires*

Exercice 7. Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel, on rappelle que pour $A \subset E$ et $F \subset E^*$, on note

$$A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\} \quad \text{et} \quad F^o = \{x \in E \mid \forall \varphi \in F, \varphi(x) = 0\}$$

1. Montrer que $A^\perp$ (resp. F^o) est un sous-espace vectoriel de E^* (resp. de E).
2. Montrer les assertions suivantes :
   a) Si $A \subset A' \subset E$, alors $A'^\perp \subset A^\perp$.
   b) Si $B \subset B' \subset E^*$, alors $B'^o \subset B^o$.
   c) Si $A \subset E$, alors $A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$.
   d) Si $B \subset E^*$, alors $B^o = (\mathrm{Vect}\, B)^o$.
3. On suppose que E est de dimension finie, et que $A \leqslant E$ est un sous-espace vectoriel de E, montrer que $\dim A + \dim A^\perp = \dim E$ et que $A^{\perp o} = A$.
   (Remarque, on a de même si E est de dimension finie, et que $B \leqslant E^*$ est un sous-espace vectoriel de E^*, $\dim B + \dim B^o = \dim E^*$ et $B^{o\perp} = B$).

Exercice 8. Soient E et F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels (pas forcément de dimension finie) et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Montrer que
$$(\mathrm{Im}\, f)^\perp = \mathrm{Ker}({}^t f)$$
2. En déduire que si E et F sont de dimension finie, f et ${}^t f$ ont même rang et que par conséquent, pour $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\Bbbk)$, A a le même rang que sa transposée.
3. Contre exemple en dimension infinie : Considérons $\Bbbk[X]$, et $\partial : \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]$ envoyant $P(X)$ sur le polynôme dérivé $P'(X)$.
   a) Soit $\varphi \in \Bbbk[X]^*$ une forme linéaire, montrer que $\mathrm{Ker}\, {}^t\partial(\varphi)$ contient les polynômes constants.
   b) En déduire que ∂ est surjective et pas ${}^t\partial$.

† *Dualité et dimension*

Exercice 9. Soit $E = \Bbbk^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\Bbbk$, et $F = \Bbbk^{(\mathbb{N})}$ le sous espace formé des suites nulles à partir d'un certain rang.

1. On considère, pour $i \in \mathbb{N}$, la suite e^i définie par $(e^i)_j = \delta_{i,j}$ (le symbole de Kronecker). Montrer que la famille $\{e^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ forme une base de F, pourquoi ne forme-t-elle pas une base de E ?
2. Montrer que F^* est isomorphe à E.

Exercice 10. (Dimension du dual)
Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel, muni d'une base $\{b_i\}_{i\in I}$ (une telle base existe toujours grâce à l'axiome du choix, quitte à avoir $|I| = \infty$ si E est de dimension infinie). Par définition, tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i$$

où les λ_i sont nuls sauf pour $i \in I' \subset I$ un ***sous-ensemble fini***.

1. Montrer que l'application b_k^* envoyant x sur λ_k est une forme linéaire.
2. Montrer que les $\{b_i^*\}_{i\in I}$ forment une famille libre de E^*.
3. Si E est de dimension finie, en déduire que les $\{b_i^*\}_{i\in I}$ forment une base de E^*

4. Si E est de dimension infinie, montrer que la somme infinie $\varphi := \sum_{i\in I} b_i^*$ est encore une forme linéaire bien définie sur E. En déduire que $\dim E^* > \dim E$, et que ces deux espaces ne peuvent pas être isomorphes (*indication : montrer que φ n'appartient pas à* $\mathrm{Vect}(\{b_i\}_{i\in I})$).

Exercice 11. (Bidual)
Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel

1. Pour $x \in E$, on définit $ev_x : E^* \to \Bbbk$ par
$$\forall \varphi \in E^*,\ ev_x(\varphi) := \varphi(x)$$
(ev_x est l'évaluation en x des formes linéaires). Montrer que ev_x est une forme linéaire sur E^* (donc un élément du bidual E^{**}).
2. Montrer que l'application $ev : E \to E^{**}$ envoyant x sur ev_x est une application linéaire.
3. Montrer que ev est injective.
4. Si E est de dimension finie, en déduire que ev est un isomorphisme de E vers son bidual.
5. Si E est de dimension infinie, montrer que ev n'est jamais surjective (on pourra utilser la conclusion de l'exercice 10).

(Bonus : Si E et F sont de dimension finie, montrer que les isomorphisme $E \simeq E^{**}$ et $F \simeq F^{**}$ permettent d'identifier f à ${}^t({}^tf)$ pour une application linéaire $f : E \to F$)

† *Une application*

Exercice 12. (Algèbre linéaire à la rescousse de l'analyse numérique !)
Considérons l'espace $E := \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-1,1]$, il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de dimension infninie, dont il est inenvisageable d'exhiber une base.
On considère la forme linéaire ϕ définie sur E par
$$\phi(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$$
Dans un monde parfait, on pourrait exprimer cette forme linéaire sur une base convenable de E^*, mais nous ne sommes pas dans un monde parfait.
Restreignons notre étude au sous espace F de E formé des polynômes de degré au plus 2 (que l'on voit comme des fonctions continues sur $[-1,1]$).

1. Montrer que les formes linéaires
$$\begin{cases} \varphi_{-1} : P \mapsto P(-1) \\ \varphi_0 : P \mapsto P(0) \\ \varphi_1 : P \mapsto P(1) \end{cases}$$
Forment une base de F^* (*indication : on pourra penser à l'interpolation de Lagrange*). En calculer la base antéduale P_{-1}, P_0, P_1.
2. Calculer $\phi(P_{-1}), \phi(P_0), \phi(P_1)$ et en déduire la formule suivante :
$$\forall P \in F, \int_{-1}^{1} P(t)dt = \frac{1}{3}\left(P(-1) + 4P(0) + P(1)\right)$$

Autrement dit, $\phi = \frac{1}{3}(\varphi_{-1} + 4\varphi_0 + \varphi_1)$ sur F, cette formule peut-être ensuite étendue en une forme linéaire sur E, donc on espère qu'elle est "assez proche" de la forme ϕ (vu qu'elles coïncident sur le sous-espace F).