TD 2 - Modules, partie 2

Exercice 1. Montrer que $R[X]$ vu comme R-module, n'est pas finiment engendré.

Exercice 2. Soit $R = \mathbb{C}[X, Y]$ et soit $M \subset R$ l'idéal engendré par X et Y. Est-ce que M est un R-module libre ?

Exercice 3. Soit R un anneau et M un R-module libre de rang fini. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

(a) Tout ensemble de générateurs contient une base.

(b) Toute famille libre peut s'étendre en une base.

Exercice 4. Soit $R = \mathbb{Z}$, on considère le R-module $M = \mathbb{Z}^2$. Dans chacun des cas suivants, vérifier si le sous-module N admet un supplémentaire.

$$N = (1, 1)\mathbb{Z} \quad N = (2, 3)\mathbb{Z} \quad N = (6, 1)\mathbb{Z}$$

Exercice 5. Un R-module M est dit ***simple*** si il est non nul et si il n'admet pas de sous-module propre : tout sous-module N de M est égal à $\{0\}$ ou a M.

1. Montrer que, si $\Bbbk$ est un corps, les $\Bbbk$-modules simples sont exactement les espaces vectoriels de dimension 1.
2. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est premier, est un $\mathbb{Z}$-module simple.
3. Soit M un R-module simple, montrer que l'annulateur (cf TD1 exercice 9) I de M est un idéal maximal de R.
4. Montrer que M est isomorphe à R/I en tant que R-module.
5. Montrer le *Lemme de Schur* : Soit $\varphi : M \to M'$ un morphisme entre deux modules simples. Alors φ est soit le morphisme nul, soit un isomorphisme.

Exercice 6. Soient $N \subset M$ des R-modules $p : M \to M/N$ la projection canonique, montrer que les sous-modules de M/N sont en bijection avec les sous-modules de M contenant N via l'application $M' \mapsto p^{-1}(M')$.

Exercice 7. (Deuxième théorème d'isomorphisme)
Soient M et N deux sous-modules d'un même module, montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M & \longrightarrow & (M+N)/N \\ & m & \longmapsto & \overline{m} = m + N \end{array}$$

est un morphisme de modules, qui induit un isomorphisme

$$M \big/ (M \cap N) \simeq (M+N)/N$$

Exercice 8. (Troisième théorème d'isomorphisme)
Soient $P \subset N \subset M$ trois R-modules, montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M/P & \longrightarrow & M/N \\ & m + P & \longmapsto & m + N \end{array}$$

est bien définie et qu'il s'agit d'un morphisme de modules, qui induit un isomorphisme

$$(M/P) \big/ (N/P) \simeq M/N$$

† *Propriétés universelles*

Exercice 9. (Propriété universelle du produit)
Soient M et N deux R-modules, on considère le produit direct $M \times N$, muni des projections canoniques $p_1, p_2 : M \times N \to M, N$ définies par $p_1(m,n) = m$ et $p_2(m,n) = n$.

1. Montrer que, pour tout R-module E, muni de deux morphismes $u : E \to M$ et $v : E \to N$, il existe un unique morphisme $\varphi : E \to M \times N$ tel que $p_1 \circ \varphi = u$ et $p_2 \circ \varphi = v$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "u"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[dr, "v"] & \\ M & M \times N \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & N \end{tikzcd}$$

2. Soit P un autre R-module, déduire de la question précédente une bijection

$$\mathrm{Hom}_R(P, M \times N) \approx \mathrm{Hom}_R(P, M) \times \mathrm{Hom}_R(P, N)$$

Exercice 10. (Propriété universelle du quotient)
Soient E un R-module et F un sous-module de E, on pose $\pi : E \to E/F$ la projection canonique.
Soit M un autre R-module, et $p : E \to M$ un morphisme tel que $F \subset \operatorname{Ker} p$.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme $\varphi : E/F \to M$ tel que $\varphi \circ \pi = p$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & M \\ E/F \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

2. Soit P un autre R-module, déduire de la question précédente une bijection

$$\mathrm{Hom}_R(E/F, P) \approx \{p \in \mathrm{Hom}_R(E, M) \mid p(F) = 0\}$$

Exercice 11. (Propriété universelle du conoyau)
Soit $f : M \to N$ un morphisme de R-modules, on appelle ***conoyau*** de f (noté $\operatorname{Coker} f$) le quotient $N/\operatorname{Im} f$ (on note π la projection canonique $N \to N/\operatorname{Im} f$.

1. Montrer que $\pi \circ f = 0$
2. Soit $p : N \to P$ un morphisme de R-modules tel que $p \circ f = 0$, montrer qu'il existe un unique morphisme de R-modules $\varphi : \operatorname{Coker} f \to P$ tel que $\varphi \circ \pi = p$ (propriété universelle du conoyau)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "p"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & & P \end{tikzcd}$$

(*indication : on pourra utiliser la propriété universelle du quotient*).