UPJV 2021-2022
L3 Mathématiques Algèbre linéaire avancée

TD1 - Modules partie 1

Exercice 1. Soit $\Bbbk$ un corps, lesquels des sous-ensembles suivants de $\Bbbk[X]$ sont des k-sous-modules de $\Bbbk[X]$?

(a) Les polynômes de degré exactement 4.

(b) Les polynômes de degré au plus 4.

(c) Les polynômes unitaires.

(d) L'ensemble $\{\text{polynômes unitaires}\} \cup \{0\}$.

(e) Les polynômes de degré pair.

Exercice 2. Soit R un anneau, vu comme R-module. Montrer que les sous-R-modules de R sont exactement les idéaux de R.

Exercice 3. Soit R un anneau, vu comme un R-module. Déterminer tous les morphismes de R-modules de R vers R.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions lisses (i.e infiniment dérivables) est un $\mathbb{R}$-module. Montrer que l'application ∂ envoyant f sur f' est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, quel est son noyau ? Son image ?

Exercice 5. Soient E, F, G trois sous-modules d'un R-module M. Est-il vrai que

$$E \cap (F+G) = (E \cap F) + (E \cap G)$$

$$E \cap (F + (E \cap G)) = (E \cap F) + (E \cap G)$$

Exercice 6. Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel. Soient A et B des parties de E. Comparer

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Vect}(A \cup B) & \text{et} & \mathrm{Vect}(A) \cup \mathrm{Vect}(B) \\ \mathrm{Vect}(A \cap B) & \text{et} & \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B) \\ \mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) & \text{et} & \mathrm{Vect}(A) \end{array}$$

Exercice 7. Soit $\varphi : M \to N$ un morphisme de R-modules, et soient M', N' des sous-modules respectifs de M et N. Montrer que $\varphi(M')$ est un sous-module de N et que $\varphi^{-1}(N')$ est un sous-module de M.

Exercice 8. Soit M un R-module, on définit l'***annulateur*** de M par $I = \{r \in R \mid rM = 0\}$.

1. Montrer que I est bien un idéal de R.
2. Quel est l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
4. Quel est l'annulateur du $\mathbb{Z}$-module $M := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Exercice 9. Soit $(G,+)$ un groupe abélien, vérifier que poser, pour $n \in \mathbb{Z}, g \in G$,

$$n.g := g + g + \cdots + g \ \ (n \text{ termes}) \ \ \text{et} \ \ (-n).g := -(n.g)$$

munit G d'une structure de $\mathbb{Z}$-module.

Exercice 10. (Algèbres)
Soit R un anneau et S un R-module, on dit que S est une R-***algèbre*** (associative, commutative et unitaire) s'il existe une loi interne $\times_S : S \times S \to S$ respectant les conditions suivantes :

- Associativité : pour $s_1, s_2, s_3 \in S$, on a $s_1 \times_S (s_2 \times_S s_3) = (s_1 \times_S s_2) \times_S s_3$.
- Commutativité : pour $s_1, s_2 \in S$, on a $s_1 \times_S s_2 = s_2 \times_S s_1$
- Unitarité : il existe un $1_S \in S$ tel que pour tout $s \in S$, on ait $1_S \times_S s = s$.
- R-bilinéarité : on a les égalités suivantes ($s_i, s' \in S, r \in R$)
  - $r.(s \times_S s') = (r.s) \times_S s' = s \times_S (r.s')$
  - $(s_1 + s_2) \times_S s_3 = s_1 \times_S s_3 + s_2 \times_S s_3$
  - $s_1 \times_S (s_2 + s_3) = s_1 \times_S s_2 + s_1 \times_S s_3$.

1. Soit $(S, +, \times_S)$ une R-algèbre.
   a) Montrer que $(S, +, \times_S)$ est un anneau commutatif unitaire.
   b) Montrer que l'application $f : R \to S$ définie par $r \mapsto r.1_S \in S$ est un morphisme d'anneaux.
2. Réciproquement, si $(S, +, \times)$ est un anneau et $f : R \to S$ un morphisme d'anneaux, montrer que l'on munit S d'une structure de R-module en posant :
$$\forall r \in R, s \in S, \quad r.s := f(r)s$$
   Montrer que l'on fait ainsi de S une R-algèbre.
3. Montrer que $R[X]$, vu comme R-module, est en fait une R-algèbre. Quel est le morphisme d'anneau $R \to R[X]$ associé ?
4. Montrer que $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, et une $\mathbb{Q}$-algèbre, quels sont les morphismes $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ associés ?
5. Montrer que pour tout anneau R, il existe un unique morphisme d'anneau $\mathbb{Z} \to R$. En déduire que tout anneau est muni d'une structure canonique de $\mathbb{Z}$-algèbre.

Exercice 11. (Mon premier foncteur)
Soient S et R deux anneaux, $f : R \to S$ faisant de S une R-algèbre (cf exercice 10), et M un S-module.

1. Montrer que poser $r.m := f(r).m$ munit M d'une structure de R-module.
2. Si $\varphi : M \to N$ est un morphisme de S-modules, montrer que la construction précédente fait de φ un morphisme de R-modules.
3. Qu'obtient-on en appliquant les résultats précédents au cas $R = \mathbb{Z}$?

Exercice 12. Soit $\mathbb{k}$ un corps, E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, et $R := \mathbb{k}[X]$ l'anneau des polynômes à une variable.

1. Soit $u \in \mathrm{End}_k(E)$, montrer que la loi de composition
$$\begin{array}{ccc} R \times E & \longrightarrow & E \\ (P, x) & \longmapsto & P(u)(x) \end{array}$$
   munit E d'une structure de R-module.
2. Réciproquement, soit M un R-module, montrer que M est aussi un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et que l'application $u : v \mapsto X.v$ est un endomorphisme du $\mathbb{k}$-espace vectoriel M.
3. En déduire que tout R-module peut s'obtenir par la construction de la question (1).
4. Montrer que pour tout $u, v \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(E)$, les R-modules associés à (E, u) et (E, v) sont isomorphes si et seulement si u et v sont semblables (i.e conjuqués par un élément de $\mathrm{Gl}(E)$).
5. On suppose maintenant que (E, u) est un R-module monogène, c'est-à-dire que $E = R.v$ pour un certain $v \in E$, on suppose également que E est de dimension finie comme $\mathbb{k}$-espace vectoriel.
   a) En considérant l'application $P \mapsto P.v$, montrer que $(E, u) \simeq R/(P_0)$ pour un certain polynôme unitaire $P_0 \in \mathbb{k}[X]$.
   b) Montrer que P_0 est le polynôme minimal de l'endomorphisme u.
   c) Montrer que E, vu comme $\mathbb{k}$-espace vectoriel, admet pour base la famille $\{u^i(v)\}_{i \in [\![0, n-1]\!]}$, où $n = \deg P_0$.
   d) En déduire que P_0 est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u.