Correction TD 4

Exercice 1. 1. On a

$$p.(n \otimes m) = (pn) \otimes m = 0 \otimes m \quad \text{et} \quad q.(n \otimes m) = n \otimes (qm) = n \otimes 0$$

ces deux éléments sont nuls car

$$0 \otimes m + 0 \otimes m = (0+0) \otimes m = 0 \otimes m$$

et de même pour $n \otimes 0$.
2. Grâce au théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $pu + qv = 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
(n \otimes m) &= 1.(n \otimes m) \\
&= (pu + qv).(n \otimes m) \\
&= pu.(n \otimes m) + qv.(n \otimes m) \\
&= u.(p.(n \otimes m)) + v.(q.(n \otimes m)) \\
&= u.0 + v.0 = 0
\end{aligned}$$

Donc $n \otimes m = 0$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
3. On sait que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est engendré par les tenseurs purs : un élément s'écrit comme

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i (n_i \otimes m_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . 0 = 0$$

D'où $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{0\}$ (tous ses éléments sont nuls).

Exercice 2. On sait que $S \otimes_R M$ est un R-module, c'est donc en particulier un groupe abélien. Commencons par montrer que l'application

$$s.(s' \otimes m) := (ss') \otimes m$$

Est bien définie, autrement dit qu'elle se comporte bien avec les relations définissant $S \otimes_R M$. On a

- $s.((s_1 + s_2) \otimes m) = (s(s_1 + s_2) \otimes m) = (ss_1 + ss_2) \otimes m = (ss_1) \otimes m + (ss_2) \otimes m = s.(s_1 \otimes m) + s.(s_2 \otimes m)$.
- $s.(s \otimes (m_1 + m_2)) = (ss') \otimes (m_1 + m_2) = (ss') \otimes m_1 + (ss') \otimes m_2 = s.(s' \otimes m_1) + s.(s' \otimes m_2)$.
- $s.((rs') \otimes m) = (srs') \otimes m = (ss') \otimes (rm) = s.(s' \otimes (rm))$.

Ceci montre que la multiplication par s est bien définie, et s'étend par linéarité à $S \otimes_R M$. Il est trivial à partir de là de montrer que cela définit bien une loi de S-module sur M.
On peut aussi utiliser l'exercice 5 pour montrer que la multiplication par s est bien définie, et que c'est un morphisme de R-module $S \otimes_R M \to S \otimes_R M$.

Exercice 3. 1. Comme à l'exercice 1, on a

$$n.\left(\frac{a}{b} \otimes k\right) = \frac{a}{b} \otimes (nk) = \frac{a}{b} \otimes 0 = 0$$

2. Soit $(\frac{a}{b} \otimes k)$ un tenseur pur de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \otimes \overline{k} &= 1.\left(\frac{a}{b} \otimes k\right) \\ &= \frac{n}{n}.\left(\frac{a}{b} \otimes \overline{k}\right) \\ &= \frac{a}{bn} \otimes n\overline{k} \\ &= \frac{a}{bn} \otimes 0 = 0 \end{aligned}$$

3. On sait que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par les tenseurs purs : un élément s'écrit comme

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(\frac{a_i}{b_i} \otimes n_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i.0 = 0$$

D'où $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0\}$ (tous ses éléments sont nuls).
Le fait de tensoriser par $\mathbb{Q}$ nous a "forcé à rendre n inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$", mais comme on avait déjà $n = 0$ dans cet anneau, on a "rendu 0 inversible" ce qui force $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à être l'anneau nul.
Plus généralement, tensoriser par un corps va "tuer la torsion", c'est a dire annuler la partie de torsion d'un module (ce qui a ses avantages et ses inconvénients...)

Exercice 4.
1. On doit premièrement montrer que ce produit est bien défini, comme il est commutatif, on se contente de tester l'égalité si l'on change le représentant du premier facteur, et par définition, il suffit de vérifier que

- $((s_1 + s_2) \otimes t)(s' \otimes t') = ((s_1 \otimes t) + (s_2 \otimes t))(s' \otimes t')$
- $(s \otimes (t_1 + t_2))(s' \otimes t') = ((s \otimes t_1) + (s \otimes t_2))(s' \otimes t')$
- $r((s \otimes t)(s' \otimes t')) = (rs \otimes t)(s' \otimes t') = (s \otimes rt)(s' \otimes t')$

on a

$$\begin{aligned} ((s_1 + s_2) \otimes t)(s' \otimes t') &= ((s_1 + s_2)s') \otimes (tt') \\ &= (s_1 s' + s_2 s') \otimes (tt') \\ &= (s_1 s) \otimes (tt') + (s_2 s) \otimes (tt') \end{aligned}$$

On raisonne de même pour le deuxième cas, pour le troisième, on a

$$\begin{aligned} r((s \otimes t)(s' \otimes t')) &= r((ss') \otimes (tt')) \\ &= (((rs)s') \otimes (tt')) = ((rs) \otimes t)(s' \otimes t') \\ &= ((ss') \otimes ((rt)t')) = (s \otimes (rt))(s' \otimes t') \end{aligned}$$

Youpi le produit est bien défini, il reste à prouver que c'est bien un produit d'anneau, évacuons déjà l'existence d'un neutre : $1 = 1 \otimes 1$ est un neutre pour ce produit, le fait qu'on l'ait étendu par bilinéarité donne directement la distributivité à gauche et à droite, il reste seulement à vérifier l'associativité, qui découle directement de celle de S et T.
La structure de R algèbre est alors donnée par $r.(s \otimes t) = (rs) \otimes t = s \otimes (rt)$.

Exercice 5.
1. C'est tout l'intérêt de la définition des tenseurs purs :

- $p(m + m', n) = (m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n = p(m, n) + p(m', n)$
- $p(m, n + n') = m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n' = p(m, n) + p(m, n')$
- $p(rm, n) = (rm) \otimes n = r(m \otimes n) = m \otimes (rn) = rp(m, n) = p(m, rn)$

Donc p est bien une application R-bilinéaire.

2. Par définition, $\varphi \circ p$ envoie (m,n) sur $\varphi(m \otimes n)$, comme p est bilinéaire, on a

- $f(m+m',n) = \varphi((m+m') \otimes n) = \varphi(m \otimes n + m' \otimes n) = \varphi(m \otimes n) + \varphi(m' \otimes n) = f(m,n) + f(m',n)$
- $f(m,n+n') = \varphi(m \otimes (n+n')) = \varphi(m \otimes n + m \otimes n') = \varphi(m \otimes n) + \varphi(m \otimes n') = f(m,n) + f(m,n')$
- $f(rm,n) = \varphi((rm) \otimes n) = \varphi(r(m \otimes n)) = r\varphi(m \otimes n) = rf(m,n)$
- $f(rm,n) = \varphi((rm) \otimes n) = \varphi(m \otimes rn) = f(m,rn)$

3. Ici, la difficulté est de montrer que l'application $\varphi : m \otimes n \mapsto f(m,n)$ est bien définie. Comme elle est étendue par linéarité, elle donnera alors automatiquement une application linéaire. On a

- $\varphi((m \otimes n) + (m' \otimes n)) = f(m,n) + f(m',n) = f(m+m',n) = \varphi((m+m') \otimes n)$
- $\varphi((m \otimes n) + (m \otimes n')) = f(m,n) + f(m,n') = f(m,n+n') = \varphi(m \otimes (n+n'))$
- $\varphi(r.(m \otimes n)) = r.f(m,n) = f(rm,n) = f(m,rn) = \varphi((rm) \otimes n) = r.\varphi(m \otimes n) = \varphi(m \otimes (rn))$

4. Par construction, les applications construites dans les deux questions précédentes sont réciproques l'une de l'autre. Cette propriété est vraiment capitale : il faut penser à $m \otimes n$ comme à un "produit de m et n", la multiplication étant une application bilinéaire par excellence. Évidemment ce point de vue a ses limites : il n'est pas question à priori de déterminer le produit de deux tenseurs purs...

Exercice 6. (Base d'un produit tensoriel)
1. C'est évident car e_i^* et f_j^* sont respectivement des applications linéaires, et car le produit dans k est bilinéaire.
- $\varphi_{i,j}(u+u',v) = e_i^*(u+u')f_j^*(v) = (e_i^*(u) + e_i^*(u')f_j^*(v) = e_i^*(u)f_j^*(v) + e_i^*(u')f_j^*(v) = \varphi_{i,j}(u,v) + \varphi_{i,j}(u',v)$.
- $\varphi_{i,j}(u,v+v') = e_i^*(u)f_j^*(v+v') = e_i^*(u)(f_j^*(v) + f_j^*(v')) = e_i^*(u)f_j^*(v) + e_i^*(u)f_j^*(v') = \varphi_{i,j}(u,v) + \varphi_{i,j}(u,v')$.
- $\varphi_{i,j}(ru,v) = e_i^*(ru)f_j^*(v) = re_i^*(u)f_j^*(v) = r\varphi_{i,j}(u,v) = \varphi_{i,j}(u,rv)$.

Ensuite, par définition des familles duales, on a

$$\varphi_{i,j}(e_k, f_\ell) = e_i^*(e_k)f_j^*(f_\ell) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell} = \delta_{(i,j),(k,\ell)}$$

2. Par l'exercice précédent, $\varphi_{i,j}$ induit une application linéaire bien définie $\widetilde{\varphi_{i,j}} : E \otimes_k F \to k$ définie sur les tenseurs purs par

$$\widetilde{\varphi_{i,j}}(u \otimes v) = \varphi_{i,j}(u,v)$$

on a alors par définition $\widetilde{\varphi_{i,j}}(e_k \otimes f_\ell) = \delta_{(i,j),(k,\ell)}$.

3. Soit une combinaison linéaire nulle :

$$x = \sum_{(k,\ell) \in I \times J} \alpha_{(k,\ell)}(e_k \otimes f_\ell) = 0$$

où les coefficients $\alpha_{(k,\ell)}$ sont presque tous nuls. Pour $i,j \in I \times J$, on a

$$0 = \widetilde{\varphi}(x) = \sum_{(k,\ell) \in I \times J} \alpha_{(k,\ell)}\widetilde{\varphi_{i,j}}(e_k \otimes f_\ell = \sum_{(k,\ell) \in I \times J} \alpha_{(k,\ell)}\delta_{(i,j),(k,\ell)} = \alpha_{(i,j)}$$

donc tous les $\alpha_{(i,j)}$ sont nuls et la famille $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est libre.

4. Soit $u \otimes v$ un tenseur pur de $E \otimes F$. Comme (e_i) et (f_j) sont respectivement des bases de E et F, on peut écrire u et v comme des combinaisons linéaires

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{j \in J} \mu_j f_j$$

où les λ_i et les μ_j sont presques tous nuls. On a alors

$$u \otimes v = \left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) \otimes \left(\sum_{j \in J} \mu_j f_j\right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j)$$

(et les $(\lambda_i \mu_j)$ sont presques tous nuls). Donc $u \otimes v$ est une combinaison linéaire des $e_i \otimes f_j$ comme annoncé. Comme les tenseurs purs forment une famille génératrice de $E \otimes F$, ceci montre que la famille $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est génératrice : par la question précédente c'est une base de $E \otimes F$.

5. Le produit des bases canoniques respectives de k^n et k^m donne une base de $k^n \otimes k^m$ de cardinal nm. Cet espace est donc isomorphe à tous les k-espaces vectoriels de dimension mn, en particulier k^{mn} et $\mathcal{M}_{n,m}(k)$.

6. Des bases respectives (comme k-espaces vectoriels) de $k[X]$ et $k[Y]$ sont données par $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(Y^j)_{j \in \mathbb{N}}$. Une base de $k[X] \otimes_k k[Y]$ est alors donnée par $(X^i \otimes Y^j)_{(i,j) \in I \times J}$. Cette base est clairement en bijection avec la base $(X^i Y^j)_{(i,j) \in I \times J}$ de $k[X, Y]$. Cette bijection induit un isomorphisme entre ces deux espaces, isomorphisme envoyant le tenseur pur $(P(X) \otimes Q(Y))$ sur le polynôme $P(X)Q(Y)$: Les produits de deux polynômes à 1 variable correspondent aux tenseurs purs de $k[X] \otimes k[Y]$.

Exercice 7.

1.a) C'est évident : la bilinéarité veut entre autre dire "linéaire en chaque variable", en particulier linéaire en la seconde variable :

$$f_m(n + rn') = f(m, n + rn') = f(m, n) + rf(m, n') = f_m(n) + rf_m(n')$$

b). C'est encore la bilinéarité : soit $n \in N$, on a

$$f_{rm+m'}(n) = f(rm + m', n) = rf(m, n) + f(m', n) = rf_m(n) + f_{m'}(n) = (rf_m + f_{m'})(n)$$

2. Là ça fait mal à la tête : il faut bien penser que $\varphi(m)$ est un morphisme de modules $N \to P$, on a donc

- $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$ car φ est un morphisme, donc

$$f(m + m', n) = \varphi(m + m')(n) = \varphi(m)(n) + \varphi(m')(n) = f(m, n) = f(m', n)$$

- Comme $\varphi(m)$ est un morphisme, $f(m, n + n') = \varphi(m)(n + n') = \varphi(m)(n) + \varphi(m)(n') = f(m, n) + f(m, n')$.
- $\varphi(rm)(n) = (r\varphi(m))(n) = r(\varphi(m)(n)) = \varphi(m)(rn)$

Donc f est bien R-bilinéaire.

3. On vient de définir une bijection $\mathrm{Bilin}((M, N), P) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P))$, donnée par $f(-, -) \mapsto (m \mapsto f(m, -))$, on a vu dans l'exercice précédent que l'on avait une bijection $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \simeq \mathrm{Bilin}((M, N), P)$, donnée par $\varphi \mapsto f : (m, n) \mapsto \varphi(m \circ n)$.
En composant ces deux bijections, on obtient une bijection

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P))$$

Envoyant φ sur $m \mapsto (n \mapsto \varphi(m \otimes n))$, réciproquement, $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P))$ est envoyée sur $\varphi : m \otimes n \mapsto \psi(m)(n)$.

4. Soit $x \in \Omega$, la différentielle df_x est une application linéaire $R^n \to \mathbb{R}$, donc un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Autrement dit l'application $df : x \mapsto df_x$ est une fonction lisse de Ω vers $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, donc sa différentielle $d(df)_x$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$, donc un élément de $\mathrm{Bilin}((\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ par le début de l'exercice. (et accessoirement un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$).