Correction TD1bis

Exercice 1.
1. Soit $y = p(x) \in \operatorname{Im} p$, si y est en plus dans $\operatorname{Ker} p$, on a $p(y) = 0$, mais par hypothèse, $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y = 0$, d'où le résultat.
2. Si $y = p(x) \in \operatorname{Im} p$, alors $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$, réciproquement, si $p(y) = y$, alors $y \in \operatorname{Im} p$ par définition (puisque c'est l'image de y).
3. On a $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$.
4. Pour tout $x \in M$, on a $x = x - p(x) + p(x)$, avec $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $p(x) \in \operatorname{Im} p$, donc $\operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p = M$, et cette somme est directe d'après la question 1.

Exercice 2.
1. Si G est un supplémentaire de F, alors $F \cap G = \{0\}$ et tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.
On considère la restriction de $E \twoheadrightarrow E/F$ à G, on obtient un morphisme $\varphi : G \to E/F$, envoyant g sur $\overline{g}$.
Soit $\overline{x} \in E/F$, comme $E = F \oplus G$, on a $x = f + g$, donc $\overline{x} = \overline{f} + \overline{g} = \overline{g}$ et φ est surjective. Ensuite, on a $g \in \operatorname{Ker} \varphi$ si et seulement si $\overline{g} = 0$, autrement dit $g \in F$, mais alors $g \in G \cap F = \{0\}$, donc φ est injective : c'est un isomorphisme.

2.a) L'intersection $G \cap \operatorname{Ker} \partial$ est triviale : si P est un polynôme constant, alors $P(0) = 0$ entraîne $P = 0$. Ensuite, soit $P(X) \in \Bbbk[X]$, on a
$$P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$$
qui est bien une décomposition sur $G + \operatorname{Ker} \partial$, d'où la somme directe.
b) Par le théorème d'isomorphisme, on sait que $\Bbbk[X]/\operatorname{Ker}\, p \simeq \operatorname{Im} \partial = \Bbbk[X]$, par la question 1, ceci est isomorphe à G, qui est donc un sous-espace strict de $\Bbbk[X]$ (il ne contient pas le polynôme 1), qui lui est pourtant isomorphe.

Exercice 3.
1. On a $u : E \to E$, en composant par la projection $p : E \to E/F$, on obtient un morphisme $p \circ u : E \to E/F$. Soit $x \in F$, on a $u(x) \in F$, donc $p(u(x)) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} p \circ u$, donc $F \subset \operatorname{Ker} p \circ u$, d'où une factorisation $\overline{u} : E/F \to E/F$, envoyant $\overline{x}$ sur $\overline{u(x)}$.

2. Par définition, on a $\overline{u} \circ p = p \circ u$, donc p induit un morphisme $(E, u) \to (E/F, \overline{u})$ qui est un morphisme de $\Bbbk[X]$-module. Ce morphisme est surjectif, et son noyau est $(F, u_{|F})$, d'où le résultat.

3. Commençons par montrer que $\overline{\mathcal{E}}$ est une famille libre de E/F : soit une combinaison linéaire
$$0 = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \overline{e_i} = \overline{\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i}$$
(la dernière égalité vient du fait que la projection $E \to E/F$ est une application linéaire). Ceci équivaut à $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i \in F$, mais comme $\operatorname{Vect}(e_{r+1}, \cdots, e_n)$ est un supplémentaire de F, ceci entraine $\sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, d'où $\lambda_i = 0$ car $\mathcal{E}$ est une base par hypothèse.
Ensuite, on doit montrer que $\overline{\mathcal{E}}$ est une famille génératrice : soit $\overline{x} \in E/F$, on sait que x s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i$, et on a
$$\overline{x} = \overline{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i e_i} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{f_i} + \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \overline{e_i} = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i \overline{e_i}$$

donc x est bien engendré par $\overline{\mathcal{E}}$, qui forme donc une base de E/F.

4. Soit $f_i \in \mathcal{F}$, comme F est u-stable, on a $u(f_i) \in F$, donc

$$u(f_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{i,j} f_j + \sum_{i=r+1}^{n} 0 e_i$$

Soit ensuite $e_j \in \mathcal{E}$, on a $\overline{u(e_j)} = \overline{u}(\overline{e_j})$, donc le coefficients de $u(e_j)$ en e_i est le même que celui de $\overline{u}(\overline{e_j})$ en $\overline{e_i}$. D'où le résultat voulu.

Exercice 4.

1. Premièrement, p est un morphisme :

$$p(rx + x') = (rx + x').m = r.(x.m) + x'.m = r.p(x) + p(x')$$

par définition, on a $\operatorname{Im} p = \{r.m \mid r \in R\}$, donc p est surjectif si et seulement si M est monogène.

2. Si $a \in I$ est dans l'idéal annulateur de M, on a en particulier $a.m = 0 = p(a)$ par hypothèse. Réciproquement si $a \in \operatorname{Ker} p$, alors $p(a) = a.m = 0$, mais alors, pour $m' \in M$, il existe $r \in R$ tel que $m' = r.m$ et on a

$$a.m' = a.(r.m) = r.(a.m) = r.0 = 0$$

donc a est dans l'idéal annulateur de M.

3. C'est le théorème d'isomorphisme appliqué au morphisme p.