Correction séance 8 (25 mars)

Feuille de TD 2

Exercice 11. Supposons qu'un tel morphisme φ existe, soit $e+F \in E/F$, on doit avoir $\varphi(e+F) = \varphi(\pi(e)) = p(e)$, donc les valeurs de φ sont entièrement déterminées, montrons que φ est ainsi bien défini : si $e+F = e'+F$ (autrement dit $e \equiv e'[F]$, alors $e - e' \in F$, donc

$$\varphi(e) = p(e) = p(e') = \varphi(e')$$

justement car $p(e-e') = 0$ par hypothèse ($F \subset \operatorname{Ker} p$). Il est clair que φ ainsi défini est un morphisme de modules.
À nouveau, cela veut dire que n'importe quel autre module qui respecterait cette propriété universelle serait canoniquement isomorphe à E/F (si $F = \operatorname{Ker} f$ est le noyau d'un morphisme, on peut voir que $\operatorname{Im} f$ respecte également cette propriété universelle : c'est ce qu'on prouve dans la preuve du premier théorème d'isomorphisme).

Feuille de TD 3

Exercice 7.
1. On a $\langle \lambda\varphi + \psi, x\rangle = \lambda\langle\varphi, x\rangle + \langle\psi, x\rangle = 0$ si $\varphi, \psi \in A^\perp$, qui est donc un sous-espace vectoriel de E^*, pour F^o, on a $F^o = \bigcap_{\varphi\in F} \operatorname{Ker}\varphi$, il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de E.

2.

a) Soit $\varphi \in A'^\perp$ et $x \in A$, on a $x \in A'$, donc $\langle\varphi, x\rangle = 0$ par hypothèse, d'où $\varphi \in A^\perp$.

b) Soit $x \in B'^o$ et $\varphi \in B$, on a $\varphi \in B'$, donc $\langle\varphi, x\rangle = 0$ par hypothèse, d'où $x \in B^o$.

c) Soit $\varphi \in E^*$, on a

$$\varphi \in A^\perp \Leftrightarrow A \subset \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \operatorname{Vect} A \subset \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi \in (\operatorname{Vect} A)^\perp$$

d) On a $B \subset \operatorname{Vect} B$, donc $(\operatorname{Vect} B)^o \subset B^o$, réciproquement si $x \in B^o$, alors $\forall\varphi \in B, \varphi(x) = 0$, comme les éléments de $\operatorname{Vect} B$ sont des combinaisons linéaires d'éléments de B, ils valent tous 0 en x, d'où $B^o \subset \operatorname{Vect}(B)^o$ et le résultat.

3. On pose $n = \dim E$, et $r = \dim A$, on considère une base $(e_1, \cdots, e_r)$ de A, que l'on complète en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*$ une forme linéaire sur E, on a $\varphi \in A^\perp$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, r]\!], 0 = \varphi(e_k) = \lambda_k$$

autrement dit si $\varphi \in \operatorname{Vect}(e_{r+1}^*, \cdots, e_n^*)$, d'où $A^\perp = \operatorname{Vect}(e_{r+1}^*, \cdots, e_n^*)$ est de dimension $n-r$ comme annoncé. On a également clairement

$$A^{\perp o} = (\operatorname{Vect}(e_{r+1}^*, \cdots, e_n^*)^o = \operatorname{Vect}(e_1, \cdots, e_r) = A$$

Exercice 8.
1. On a

$$\varphi \in \operatorname{Ker}{}^t f \Leftrightarrow \varphi \circ f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi \in (\operatorname{Im} f)^\perp$$

la conclusion sur le rang découle alors de l'exercice précédent. (celle sur les matrices découle à son tour de l'exercice 6).

3.a) On a ${}^t\partial(\varphi) = \varphi \circ \partial$, qui à un polynôme P associe $\varphi(P')$, si P est constant, $P' = 0$ et ${}^t\partial(\varphi)(P) = 0$, d'où le résultat.
b) On sait que ∂ est surjective car tout polynôme admet des primitives (qui sont encore des polynômes), en revanche, $\operatorname{Im}{}^t\partial$ ne contient que des formes linéaires s'annulant sur les constante, elle n'est donc pas égale à $\Bbbk[X]^*$.

Feuille de TD 4

Exercice 1. Grâce au théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $pu + qv = 1$, soit $k \otimes \ell$ un tenseur pur dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (on rapelle que tout élément de cet anneau n'est pas forcément un tenseur pur, mais comme les tenseurs purs engendrent l'anneau, si ils sont tous nuls, l'anneau est nul). On a par définition $pk = 0$ et $q\ell = 0$, donc

$$\begin{aligned} k \otimes \ell &= 1.(k \otimes \ell) \\ &= (pu + qv).(k \otimes \ell) \\ &= pu.(k \otimes \ell) + qv.(k \otimes \ell) \\ &= (puk) \otimes \ell + k \otimes (qv\ell) \\ &= 0 \otimes \ell + k \otimes 0 = 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.
De façon générale (si $pgcd(m, n) = d$), on peut montrer de la même manière que $d.(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$, autrement dit que l'annulateur de ce $\mathbb{Z}$-module contient $d\mathbb{Z}$.