Correction séance 5 (25 février)

Feuille de TD 2

Exercice 7. L'application φ est un morphisme de modules, comme composée de deux morphismes : l'inclusion $M \hookrightarrow M+N$ et le quotient $M+N \twoheadrightarrow {M+N}/N$. Ce morphisme de modules est surjectif, en effet pour $m+n \in M+N$, on a $\overline{m+n} = \overline{m} + \overline{n} = \overline{m} = \varphi(m)$, il reste à décrire le noyau de ce morphisme :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{m \in M \mid \overline{m} = 0\} = \{m \in M \mid m \in N\} = M \cap N$$

et on conclut par le premier théorème d'isomorphisme.

Exercice 8. On commence par montrer que la définition de $\varphi(m+P)$ ne dépend pas du choix d'un représentant. Soit $m+P = m'+P$, autrement dit $m - m' \in P \subset N$, donc $m+N = m'+N$ donc $\varphi(m+P)$ est bien défini, il s'agit clairement d'un morphisme de modules :

$$\varphi((rm+m')+P) = (rm+m')+N = r(m+N)+(m'+N) = r\varphi(m+P)+\varphi(m'+P)$$

Ce morphisme est surjectif : si m est un représentant de $m+N$, alors $m+P$ est un antécédent de $m+N$ par φ. Enfin, $m+P$ est dans le noyau de ce morphisme si et seulement si $m \in N$, autrement dit si $m+P \in N/P$, d'où le résultat.

† *Propriétés universelles*

Exercice 9.
1. On sait que $x = \sum_{i=1}^n r_i e_i$, donc si f est un morphisme de modules, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n r_i f(e_i)$.

2. Par la question précédente, les valeurs de f ne dépendent que de celles des $f(e_i)$, il y a donc un unique tel morphisme, défini par

$$f((r_1, \cdots, r_n)) = \sum_{i=1}^n r_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n r_i m_i$$

3. Par les questions précédentes, la bijection souhaitée envoie f sur la fonction $(i \mapsto f(e_i)$ de $[\![1, n]\!]$ dans M.

Exercice 10.
1. Supposons qu'un tel morphisme φ existe, soit $e \in E$ et $\varphi(e) := (m, n)$, on a par hypothèse $m = p_1 \circ \varphi(e) = u(e)$ et $n = p_2 \circ \varphi(e) = v(e)$, donc $\varphi(e) = (u(e), v(e))$, il y a effectivement au plus une possibilité. Montrons maintenant que l'application $\varphi : e \mapsto (u(e), v(e))$ est effectivement un morphisme de R-modules :

$$\varphi(e+e') = (u(e+e') + v(e+e')) = (u(e)+u(e'), v(e)+v(e')) = (u(e), v(e)) + (u(e'), v(e')) = \varphi(e) + \varphi(e')$$

$$\varphi(r.e) = (u(r.e), v(r.e)) = (r.u(e), r.v(e)) = r.(u(e), v(e)) = r.\varphi(e)$$

donc φ est bien l'unique morphisme de R-module qui convient.

2. Comme P possède deux applications $\pi_1 : P \to M$ et $\pi_2 : P \to N$, il existe par la question précédente un unique $\varphi : P \to M \times N$ tel que $p_1 \circ \varphi = \pi_1$ et $p_2 \circ \varphi = \pi_2$.
Réciproquement, comme $M \times N$ possède deux applications $p_1 : M \times N \to M$ et $p_2 : M \times N \to N$, il existe un unique $\psi : M \times N \to P$ tel que $\pi_1 \circ \psi = p_1$ et $\pi_2 \circ \psi = \pi_1$.
On a donc que $\varphi \circ \psi$ est un morphisme $M \times N \to M \times N$ tel que $p_1 \circ \varphi \circ \psi = \pi_1 \circ \psi = p_1$ et $p_2 \circ \varphi \circ \psi = \pi_2 \circ \psi = p_2$, mais un tel morphisme est unique par hypothèse, et $1_{M \times N}$ satisfait ces conditions : on doit avoir $\varphi \circ \psi = 1_{M \times N}$.
On montre de même que $\psi \circ \varphi = 1_P$.

Exercice 12.
1. Pour $x \in M$, on a $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} p$, donc $p(f(x)) = 0$.

2. Par définition, on a $p \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} P$, par propriété universelle du quotient, il existe un unique $\varphi : N/\operatorname{Im} f \to P$ tel que $\varphi \circ \pi = p$, ce qui est exactement le résultat voulu.

Feuille de TD 3

Exercice 5.
1. C'est une vérification immédiate : la trace et la multiplication matricielle sont linéaires, et la symétrie est une formule connue : le i-ème coefficient diagonal du produit AB est $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i}$, donc

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \\ &= \operatorname{tr}(BA) \end{aligned}$$

2. Pour montrer que f est non dégénérée, il faut montrer que, pour tout $A \in E$, non nulle, la forme linéaire $f_A : B \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ est non nulle. Supposons donc qu'un coefficient a_{i_0,j_0} de A est non nul, on considère la matrice $E_{j_0,i_0} = (e_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ ayant un seul coefficient non nul égal à 1 en $i = j_0, j = i_0$. On a alors

$$\operatorname{tr}(AE_{j_0,i_0}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_{j,i} = a_{i_0,j_0} \neq 0$$

donc f_A est non nulle et f est non dégénérée.

3. Une forme bilinéaire non dégénérée $f : E \times E \to k$ induit un isomorphisme φ entre E et son dual, donné par $\varphi(A) := f_A : B \mapsto f(A, B)$, en particulier, tout élément de E^* s'écrit f_A pour un certain A, ce qui est exactement le résultat souhaité ici.