Correction séance 4 (4 février)

Exercice 1. Soient $P, Q \in R[X]$ et $\lambda \in \Bbbk$, on a

$$\deg(P+Q) \leqslant \min(\deg P, \deg Q) \quad \text{et} \quad \deg(\lambda P) \leqslant \deg P$$

Donc, si $\{P_1, \cdots, P_m\}$ est une famille finie de polynôme, de degré maximal n, le sous-module de $R[X]$ qu'elle engendre ne contient que des polynômes de degré au plus n, donc ne peut être égal à $R[X]$.

Exercice 2. On sait que cet idéal n'est pas monogène, il ne peut donc être libre de rang 1, il est au mieux libre de rang 2. Mais si $P(X,Y)$ et $Q(X,Y)$ forment une base de M, on a $Q(X,Y)P(X,Y) = P(X,Y)Q(X,Y)$, à voir comme une combinaison linéaire nulle non triviale : notre base n'est pas une base ! Donc M n'est pas libre.

Exercice 3. (a). Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ la famille $\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{2}, \binom{0}{3}\right\}$, il est clair que cette famille ne contient pas de base, et pourtant $\binom{0}{3} - \binom{0}{2} = \binom{0}{1}$ donc elle est génératrice.
(b). Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ la famille $\left\{\binom{2}{0}\right\}$, il s'agit d'une famille libre comme singleton (non nul) dans un module libre, mais qui ne peut pas être complété en une base, en effet pour $\binom{x}{y} \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$\det \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = 2y \notin \{\pm 1\}$$

Exercice 4. Un supplémentaire de N serait un module libre de rang 1, donc engendré par un certain vecteur $\binom{x}{y}$, dire que $N' = (x,y)\mathbb{Z}$ est un supplémentaire de N revient à dire que le générateur de N et $\binom{x}{y}$ forment une base de N.
Si $N = (1,1)\mathbb{Z}$, on calcule

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = y - x$$

qui devrait être égal à ± 1, on pose donc $\binom{x}{y} = \binom{0}{1}$, qui convient : $N' = (0,1)\mathbb{Z}$ est un supplémentaire de N.
Si $N = (2,3)\mathbb{Z}$, on calcule

$$\det \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{pmatrix} = 2y - 3x$$

qui devrait être égal à ± 1, on pose donc $\binom{x}{y} = \binom{1}{1}$, qui convient : $N' = (1,1)\mathbb{Z}$ est un supplémentaire de N.
Si $N = (6,1)\mathbb{Z}$, on calcule

$$\det \begin{pmatrix} 6 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = 6y - x$$

qui devrait être égal à ± 1, on pose donc $\binom{x}{y} = \binom{5}{1}$, qui convient : $N' = (5,1)\mathbb{Z}$ est un supplémentaire de N.
On remarque que l'on a pas du tout unicité du supplémentaire : $(0,1)\mathbb{Z}$ est supplémentaire de $(1,1)\mathbb{Z}$, qui est par ailleurs supplémentaire à $(2,3)\mathbb{Z}$.

Exercice 5.
1. Si $M \neq 0$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension $\geqslant 2$, alors tout vecteur non nul y engendre un sous-espace vectoriel de dimension 1, donc un sous-module propre, donc M n'est pas simple. Ensuite si M est de dimension 1, alors M est isomorphe comme $\Bbbk$-module à $\Bbbk$ et il suffit de montrer que $\Bbbk$ est un $\Bbbk$-module simple. On sait que

les sous-$\mathbb{k}$-modules de $\mathbb{k}$ sont les idéaux de $\mathbb{k}$, or comme $\mathbb{k}$ est un corps, ses seuls idéaux sont $\mathbb{k}$ et (0), d'où le résultat.

2. Soit $M \leqslant \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ un sous module non trivial, il contient un élément $\overline{k}$ non nul, mais comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k'\overline{k} = \overline{k'k} = \overline{1}$, donc $\overline{1} \in M$. Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est engendré par $\overline{1}$ comme $\mathbb{Z}$-module, on a bien $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, qui est donc simple.

3. Posons I l'annulateur de M, défini par

$$r \in I \Leftrightarrow \forall m \in M, r.m = 0$$

On va montrer que R/I est un corps, soit $r+I \in R/I$ un élément non nul (autrement dit, soit $r \in R\setminus I$). Comme $r \notin I$, il existe un $m \in M$ tel que $r.m \neq 0$, et comme M est simple, il est engendré par $r.m$ et il existe $a \in R$ tel que $a.(r.m) = (ar).m = m$, donc $(ar-1).m = 0$. Comme $m \neq 0$ et M est simple, ceci entraine $(ar-1)M = 0$ et $ar - 1 \in I$, autrement dit $ar = 1$ dans R/I, donc r y est inversible, d'où le résultat.

4. Soit $m \neq 0$ dans M, par hypothèse $\langle m \rangle = M$. On considère l'application $R \to M$ donnée par $r \mapsto r.m$, il s'agit d'un morphisme de module, surjectif car m engendre M, et de noyau I (par définition). On conclut par le premier théorème d'isomorphisme.

5. Supposons que φ est non nul, on sait que Ker φ est un sous-module de M, comme $\varphi \neq 0$, Ker $\varphi \neq M$ donc Ker $\varphi = \{0\}$ et φ est injectif. De même, $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-module de M', différent de $\{0\}$ car φ est non nul, donc $\mathrm{Im}\,\varphi = M'$ et φ est surjectif. Donc φ est un isomorphisme.

Exercice 6. Soit $\widetilde{M}$ un sous-module de M/N, comme p est un morphisme de modules, $p^{-1}(\widetilde{M})$ est un sous-module de M, qui contient N car $\widetilde{M}$ contient 0. Soit maintenant $M' \subset M$ un sous-module qui contient N, son image $p(M')$ est un sous-module de M/N. Comme p est une surjection, on a $p(p^{-1}(\widetilde{M})) = \widetilde{M}$, et enfin, on a

$$p^{-1}(p(M')) = \{x \in M \mid p(x) \in p(M')\} = \{x \mid \exists m' \in M' \mid x - m' \in N\}$$

mais comme $N \subset M'$, $x - m' \in N \Rightarrow x - m' \in M' \Rightarrow x \in M'$ car M' est un sous-module, donc $p^{-1}(p(M')) = M'$ comme annoncé.