Correction séance 2 (21 janvier)

Exercice 11.
1. Pour $r, r' \in R$ et $s, s' \in S$, on a

- $1.s = f(1)s = 1s = s$
- $(rr').s = f(rr')s = f(r)f(r')s = r.(r'.s)$
- $(r+r').s = f(r+r')s = (f(r)+f(r'))s = f(r)s + f(r')s = r.s + r'.s$
- $r.(s+s') = f(r)(s+s') = f(r)s + f(r)s' = r.s + r.s'$.

Donc S est bien un R-module.
2. On a toujours un morphisme d'anneaux $R \to R[X]$ envoyant R sur les polynômes constants.
3. On a des inclusions $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, qui sont des morphismes d'anneaux (en fait de corps), ceci nous dit en particulier qu'on peut voir $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ou comme un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel.
4. Ce dernier point revient à dire que tout anneau R admet un morphisme d'anneau $\mathbb{Z} \to R$, ce qui est un fait connu : on doit avoir $f(1) = 1$, et $f(k) = f(1+1+\cdots+1) = f(1)+\cdots+f(1) = 1+\cdots+1 = k.1$, donc il existe un unique morphisme d'anneaux (commutatifs unitaires) $\mathbb{Z} \to R$.

Exercice 8.
1. Soit F une primitive de f, on a $\varphi(f)(x) = F(x+1) - F(x-1)$, comme F est une fonction continue, la fonction $\varphi(f)$ est elle aussi continue, donc φ est bien à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et φ est linéaire par linéarité de l'intégrale.

2. Une fonction f est dans $\operatorname{Ker} \phi$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x-1) = F(x+1)$$

autrement dit, si les primitives de f sont 2-périodiques, en particulier, si on part d'une fonction F 2 périodique (par exemple, $F(x) = \sin(\pi x)$), on a $F'(x) = \pi \cos(\pi x)$ est non nulle et dans le noyau de φ, qui n'est donc pas injective.
Pour la surjectivité, on remarque que $\varphi(f)(x) = F(x+1) - F(x-1)$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ comme primitive d'une fonction continue), donc $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et φ n'est pas surjective.

Exercice 9.
1. Soient $a, b \in I$, on a par hypothèse

$$\forall m \in M, am = 0 = bm$$

donc en particulier $(a-b)m = am - bm = 0$ et $a - b \in I$, ensuite, pour $r \in R$, $(ra).m = r.(am) = 0$, donc $ra \in I$, qui est bien un idéal de R.

2. Un élément $k \in \mathbb{Z}$ est annulateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si et seulement si

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad k(a,b,c) = (ka, kb, kc) = (0,0,0)$$

autrement dit si k est annulateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on calcule donc les annulateurs de ces trois $\mathbb{Z}$-modules. Soit $n \in \mathbb{Z}$, et calculons l'annulateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est engendré par $\overline{1}$, on a que $k \in \mathbb{Z}$ est annulateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si

$$k.\overline{1} = \overline{k} = 0 \Leftrightarrow k \equiv 0[n] \Leftrightarrow n|k \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z}$$

Donc l'annulateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $n\mathbb{Z}$, l'annulateur de M est donc

$$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = (PPCM(2,3,4))\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$$

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$, k est dans l'annulateur de $\mathbb{Z}$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, kn = 0$$

ce qui entraîne bien sur $k = 0$ car $\mathbb{Z}$ est intègre, donc l'annulateur de $\mathbb{Z}$ est (0).

Exercice 10. On note $\sum_{i=1}^{n} g$ la somme de n fois g. On a, pour m, n positifs

- $1.g = \sum_{i=1}^{1} g = g$
-
$$(mn).g = \sum_{i=1}^{mn} g = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} g \right) = m.(n.g)$$
-
$$(m+n).g = \sum_{i=1}^{m+n} g = \sum_{i=1}^{m} g + \sum_{i=m+1}^{m+n} g = \sum_{i=1}^{m} g + \sum_{i=1}^{n} g = m.g = n.g$$
-
$$m.(g+g') = \sum_{i=1}^{m} g + g' = \sum_{i=1}^{m} g + \sum_{i=1}^{m} g' = m.g + m.g'$$

Il reste à généraliser ces relations au cas $m, n \in \mathbb{Z}$ en mettant des signes moins quand c'est nécessaire.