

CORRECTION SÉANCE 10 (8 AVRIL)

† *Groupes abéliens de type fini*

Pour des raisons de lisibilité, on notera exceptionnellement \mathbb{Z}/m au lieu de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Rappelons à toutes fins utiles le joli théorème des restes chinois : si m et n sont premiers entre eux, alors

$$\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n \simeq \mathbb{Z}/(nm)$$

et ça arrive d'ailleurs seulement si m et n sont premiers entre eux, dans le cas général, on a

$$\mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}/n \simeq \mathbb{Z}/(\text{ppcm}(m, n)) \times \mathbb{Z}/(\text{pgcd}(m, n))$$

Exercice 1. On sait que $8 = 2^3$, comme 2 n'est évidemment pas premier avec lui même, un groupe abélien d'ordre 8 est de la forme $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/2^{n_i}$ tel que $\sum_{i=1}^n n_i = 3$, (autrement dit les n_i forment une *partition* de 3), les seuls options sont bien-sûr $3, 1 + 2, 1 + 1 + 1$, d'où les 3 groupes abéliens d'ordre 8 :

$$\mathbb{Z}/8, \quad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4, \quad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

Exercice 2.

1. On a $36 = 4.9 = 2^2.3^2$, par le théorème des restes chinois, un groupe d'ordre 36 est produit d'un groupe d'ordre 4 par un groupe d'ordre 9, les partitions de 2 sont $1 + 1$ et 2 , il y a donc deux groupes d'ordre 4 (resp. 9) :

$$\mathbb{Z}/4, \quad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \quad (\text{resp. } \mathbb{Z}/9, \quad \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3)$$

il y a donc 4 groupes abéliens d'ordre 36 :

- $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/9 = \mathbb{Z}/36$
- $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/9 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/18$
- $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 = \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/12$
- $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 = \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/6$

2. On a $72 = 8.9 = 2^3.3^2$, par le théorème des restes chinois, un groupe d'ordre 72 est produit d'un groupe d'ordre 8 par un groupe d'ordre 9, les partitions de 3 sont $1 + 1 + 1, 1 + 2, 3$, et les partitions de 2 sont $1 + 1$ et 2 , il y a donc 3 groupes abéliens d'ordre 8 (ceux de l'exercice 1) et deux groupes abéliens d'ordre 9 (ceux de la question précédente). On a donc 6 groupes abéliens d'ordre 72

- $\mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/9 = \mathbb{Z}/72$
- $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/9 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/36$
- $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/9 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/18$
- $\mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 = \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/24$
- $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 = \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/12$
- $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/6$

3. On a $180 = 4.5.9 = 2^2.5.2^2$, par le théorème des restes chinois, un groupe d'ordre 180 est produit d'un groupe d'ordre 4, d'un groupe d'ordre 5 et d'un groupe d'ordre 9. Les partitions de 2 sont $1 + 1$ et 2 , et 1 est l'unique partition de 1. Il y a donc deux groupes abéliens, d'ordre 4 et deux groupes abéliens d'ordre 9, et un groupe abélien d'ordre 5, d'où au final 4 groupes d'ordre 180 :

- $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/5 = \mathbb{Z}/180$
- $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5 = \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/60$
- $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/5 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/90$
- $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5 = \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/30$

Exercice 3. Utilisons le théorème des restes chinois pour décomposer M en produit de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ avec p premier :

$$\begin{aligned} M &= \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/4 \\ &= \mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/4)^3 \times \mathbb{Z}/3 \times (\mathbb{Z}/9)^2 \times \mathbb{Z}/5 \end{aligned}$$

c'est la décomposition en modules indécomposables.

Pour déterminer les facteurs invariants, essayons de faire le plus grand module possible avec les restes chinois : c'est $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/5 = \mathbb{Z}/180$, on a donc

$$M = \mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/4)^2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/180$$

et on recommence la procédure sur les facteurs restants, :

$$\begin{aligned} M &= \mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/4)^2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/180 \\ &= (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3) \times (\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/9) \times \mathbb{Z}/180 \\ &= \mathbb{Z}/2 \times (\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/3) \times \mathbb{Z}/36 \times \mathbb{Z}/180 \\ &= \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/36 \times \mathbb{Z}/180 \end{aligned}$$

Et voilà les facteurs invariants.

Exercice 4. Quelles sont les opérations auxquelles on a droit ?

- Ajouter un multiple entier d'une ligne à une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + kL_j$)
- Ajouter un multiple entier d'une colonne à une autre colonne ($C_i \leftarrow C_i + kC_j$)
- Échanger deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$)
- Échanger deux colonnes ($C_i \leftrightarrow C_j$)
- Multiplier une colonne ou une ligne par -1

Toutes ces opérations correspondent à la multiplication, à gauche ou à droite, par des matrices de $GL_n(\mathbb{Z})$.

- $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $I_n + kE_{i,j}$ (une matrice identité, avec en plus un coefficient k en (i, j)).
- $C_i \leftarrow C_i + kC_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $I_n + kE_{j,i}$ (une matrice identité, avec en plus un coefficient k en (j, i)).
- $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à multiplier à gauche par une matrice de permutation : Des 1 sur la diagonale, sauf les indices i, j remplacés par des 0, et des 1 en (i, j) (j, i) .
- $C_i \leftrightarrow C_j$ correspond à multiplier à droite par une matrice de permutation : Des 1 sur la diagonale, sauf les indices i, j remplacés par des 0, et des 1 en (i, j) (j, i) .

Pour A :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 C_3 \leftarrow C_3 + 5C_1 & : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 C_4 \leftarrow C_4 - 8C_1 & : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 L_2 \leftarrow L_2 + L_4 & : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 & : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 L_2 \leftrightarrow L_4 & : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 C_2 \leftrightarrow C_4 & : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Toutes ces transformations correspondent à multiplier à droite par la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et à multiplier à gauche par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, on a $PAQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, les diviseurs élémentaires de A sont $(2, 4, 12)$.

Pour B (tableau à lire de gauche à droite, puis de haut en bas) :

$\begin{pmatrix} 0 & 48 & 12 & -46 \\ 0 & 12 & 0 & -10 \\ 0 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftarrow L_1 + 23L_4 : \begin{pmatrix} 0 & 48 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -10 \\ 0 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_4 : \begin{pmatrix} 0 & 48 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$L_3 \leftarrow L_3 + 4L_4 : \begin{pmatrix} 0 & 48 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3 : \begin{pmatrix} 0 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftrightarrow L_4 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$C_1 \leftrightarrow C_4 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$L_2 \leftrightarrow L_3 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$C_2 \leftrightarrow C_3 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	

Moralité : les matrices A et B sont équivalentes (quitte à changer les bases au départ et à l'arrivée, elles représentent la même application linéaire).

Exercice 5. Par les restes chinois, on a

$$\mathbb{Z}/pq \times \mathbb{Z}/p^2 = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q \times \mathbb{Z}/p^2 = \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p^2q$$

les facteurs invariants de ce \mathbb{Z} -module sont donc p, p^2q , qui sont différents de p^3q , le seul facteur invariant de \mathbb{Z}/p^3q

Exercice 6.

1. Premièrement μ_∞ est non vide car il contient 1. Ensuite, pour $z \in \mu_\infty$ tel que $\mu^n = 1$. On a $(\mu^{-1})^n = (\mu^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$ donc $z^{-1} \in \mu_\infty$. Enfin, soient $z, z' \in \mu_\infty$ et n, n' tels que $z^n = 1 = z'^{n'}$, on a $(zz')^{nn'} = z^{nn'} z'^{nn'} = 1$ car z, z' commutent (\mathbb{C}^* est commutatif).

2. On rappelle que $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. Soit $z = e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, si $z \in \mu_\infty$ et $z^n = 1$, on a $e^{in\theta} = 1$. On sait que

$$e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid n\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \frac{2k}{n}\pi \Leftrightarrow \theta \in \mathbb{Q}\pi$$

Il suffit donc de prendre un θ qui ne soit pas un multiple rationnel de π , par exemple $e^{i\sqrt{2}\pi}$ n'est pas dans μ_∞ .

3.a) Par définition de μ_∞ , tous ses éléments sont d'ordre fini. Or si μ_∞ admet une partie libre, il admet un sous-groupe libre, en particulier dont les éléments sont d'ordre infinis (c'est toujours vrai pour un groupe libre, ou pour un module libre).

b). Si μ_∞ est de type fini et sans partie libre, alors le théorème de classification indique que μ_∞ est un produit de groupes cycliques, en particulier finis : μ_∞ serait un groupe fini.

c). Il est clair que μ_∞ n'est pas un groupe fini ! Il contient tous les $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.

1. C'est un fait général : les inversibles d'un anneau commutatif unitaire forment un groupe abélien. Le produit est une loi associative et commutative avec un élément neutre (par définition d'un anneau commutatif unitaire), donc \mathbb{Z}/n muni de la multiplication forme un monoïde, et les éléments inversibles d'un monoïde forment toujours un groupe !

2. Il faut déjà commencer par déterminer l'ordre de ces groupes, il est connu que $|(\mathbb{Z}/n)^\times|$ est le nombre d'entiers de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ qui sont premiers avec n , donc

- $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times = \{1, 2, 3, 4\}$
- $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times = \{1, 3, 5, 7\}$
- $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

Donc $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ est d'ordre 6, il n'y a qu'un seul groupe abélien d'ordre 6 : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ est d'ordre 4, il y a donc deux possibilités, mais on a que 2 est d'ordre 4 dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$, donc ce groupe est $\mathbb{Z}/4$ (en fait, le groupe des inversible d'un corps fini est toujours fini !)

$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ est lui aussi d'ordre 4, c'est $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ car il ne contient que des éléments d'ordre 2 ($3^2 = 9 \equiv 1[8]$, $7^2 = 49 \equiv 1[8], \dots$)

Enfin, $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ est d'ordre 8, ce qui laisse trois possibilités (celles de l'exercice 1), en calculant directement, on voit que $\{1, 7, 9, 15\}$ sont d'ordre 2, et que $\{3, 5, 11, 13\}$ sont d'ordre 4, il n'y a pas d'éléments d'ordre 8, donc ce n'est pas $\mathbb{Z}/8$, et il y a des éléments d'ordre 4, donc ce n'est pas $(\mathbb{Z}/2)^3$ (qui ne contient que des éléments d'ordre 2), cela nous laisse donc seulement $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4$.

† *Invariants de similitude et décomposition de Frobenius*

Exercice 10.

1.a) C'est évident, on rappelle que $M.e_i$ est toujours la i -ème colonne de la matrice M , pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, cette colonne est le vecteur de base canonique e_{i+1} . On constate d'ailleurs que

$$M.e_n = \begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i$$

b). Soit $Q = \sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i = \sum_{i=1}^n b_{i-1} X^{i-1}$ un polynôme de degré $\leq n-1$. Si $Q(M) = 0$, on a en particulier $Q(M).e_1 = 0$. Par ailleurs, on calcule

$$Q(M).e_1 = \sum_{i=1}^n b_{i-1} M^{i-1}.e_1 = \sum_{i=1}^n b_{i-1} e_i$$

Il s'agit là d'une combinaison linéaire sur la base $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, si elle est nulle, c'est que tous ses coefficients (les b_i) sont nuls, autrement dit $Q = 0$.

c). On a

$$P(M).e_1 = M^n.e_1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i M^i.e_1 = M.e_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1} = - \sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i + \sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i = 0$$

d). Premièrement, montrons que P est annulateur de M . Il faut montrer que $P(M).e_i = 0$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On l'a déjà montré pour $i = 1$, pour $i \geq 2$, on a

$$P(M).e_i = P(M)M^{i-1}.e_1 = M^{i-1}P(M).e_1 = M^{i-1}.0 = 0$$

car les polynômes en M commutent les uns avec les autres (puisque les puissances d'une matrice fixée commutent entre elles). On sait maintenant que P est annulateur, et la question b) nous apprend que P a un degré minimal avec cette propriété : P est bien le polynôme minimal de M . 2. Le polynôme caractéristique de M doit être de degré n et divisé par le polynôme minimal, comme le polynôme minimal de M est lui aussi de degré n (et unitaire...), les polynômes minimaux et caractéristique de M sont égaux.

Exercice 11.

1. La décomposition de Frobenius de M dans k est donnée par une matrice $P \in \text{GL}_n(k)$ telle que PMP^{-1} soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

où $P_r | P_{r-1} | \dots | P_1$. On a de plus que P_1 est le polynôme minimal de M sur k , et le produit des P_i est le polynôme caractéristique de M sur k .

En voyant les P_i et P comme à coefficients dans K , on constate que la réduite de Frobenius de M sur k est candidate pour être "une réduite de Frobenius" de M sur K , on conclut par unicité de la réduction de Frobenius. Les polynômes caractéristiques et minimaux sont calculable à partir de la seule donnée de la réduite de Frobenius. La réduite de Frobenius caractérise la classe de similitude : deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même réduite de Frobenius.