Correction séance 1 (14 janvier)

Exercice 1.
(a) Pas un $\mathbb{k}$-module : 0 n'est pas un polynôme de degré 4.
(b) C'est un $\mathbb{k}$-module : il contient 0, il est stable par somme et par multiplication scalaire.
(c) Pas un $\mathbb{k}$-module : il ne contient pas 0. Si on ajoute 0 ça se complique : si $\mathbb{k} \neq \mathbb{F}_2$, $\mathbb{k}$ contient un élément λ différent de 1 et de 0, alors les polynômes unitaires ne sont pas stables par multiplication scalaire : λX n'est pas unitaire. Si $k = \mathbb{F}_2$, tous les polynômes sont unitaires, et on a terminé.
(d) C'est un $\mathbb{k}$-module : il contient 0, il est stable par somme et par multiplication scalaire.

Exercice 2. Soit I un sous-R-module de R, il doit être stable par somme :

$$\forall x, y \in I, x + y \in I$$

et il doit être stable par multiplication scalaire (en particulier $x \in I \Rightarrow -x \in I$, donc I est un sous-groupe de R) :

$$\forall x \in I, r \in R,\ r.i = ri \in I$$

C'est bien la définition d'un idéal de R.

Exercice 3. Soit R un anneau, et $f \in \mathrm{Hom}_R(R, R)$, pour tout $r \in R$, on a $r = r.1$ doit avoir

$$f(r) = f(r.1) = rf(1)$$

Donc f ne dépend que de $f(1)$. Par ailleurs, pour tout $r_0 \in R$, en posant $f(r) = rr_0$, on obtient bien un morphisme de R-module car

$$f(r.r' + r'') = (r.r' + r'')r_0 = rr'r_0 + r''r_0 = rf(r') + f(r'')$$

Donc les morphismes de modules $f : R \to R$ sont en bijection avec R (par le choix de $f(1)$).
(On voit une grosse différence avec les morphismes d'anneaux.)

Exercice 4. De façon générale, les ensemble de fonctions régulières auront toujours une structure de module (en fait d'algèbre, mais on verra ça un peu plus tard).
Ici, on sait que 0 est une fonction constante, donc lisse, et comme on a $(f + g)' = f' + g'$ et $(rf)' = rf'$, la dérivabilité d'une somme ou d'une multiplication scalaire est la même que celle des facteurs, donc $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est bien stable par somme et multiplication scalaire : il s'agit d'un $\mathbb{R}$-module.
Par ailleurs, ∂ forme bien un morphisme de $\mathbb{R}$-module : pour $r \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on a

$$\partial(rf + g) = (rf + g)' = rf' + g' = r\partial(f) + \partial(g)$$

et bien-sûr à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (la dérivée d'une fonction infiniment dérivable est toujours infiniment dérivable).
Une fonction f est dans $\mathrm{Ker}\,\partial$ si et seulement si $\partial(f) = f' = 0$, autrement dit si f est constante, donc $\mathrm{Ker}\,\partial$ est un $\mathbb{R}$-module de dimension 1 (engendré par la fonction constante 1).
Pour l'image, on a

$$f \in \mathrm{Im}\,\partial \Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid F' = f$$

autrement dit, $\mathrm{Im}\,\partial$ est formé des fonctions admettant des primitives, ce qui est le cas de toute fonction continue (en particulier, de toute fonction $\mathcal{C}^\infty$), donc $\mathrm{Im}\,\partial = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On constate que l'on n'a plus du tout $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,\partial \oplus \mathrm{Im}\,\partial$ comme en dimension finie...

Exercice 5.
1. Par définition, on a

$$E \cap (F+G) = \{f+g \in F+G \mid f+g \in E\} \quad \text{et} \quad (E \cap F) + (E \cap G) = \{f+g \in F+G \mid f \in E \text{ et } g \in E\}$$

Comme E est un module, si $f, g \in E$, en particulier $f+g \in E$, donc $(E \cap F) + (E \cap G) \subset E \cap (F+G)$, mais pour la réciproque, il faudrait avoir quelque chose comme $f+g \in E \Rightarrow f, g \in E$, ce qui est faux :
On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on pose $E = \text{Vect}\binom{1}{0}, F = \text{Vect}\binom{1}{1}, G = \text{Vect}\binom{1}{-1}$, on a $E \cap F$ et $E \cap G = \{0\}$, donc $(E \cap F) + (E \cap G) = \{0\}$. Cependant, on a $\binom{1}{0} = \frac{1}{2}\left(\binom{1}{-1} + \binom{1}{1}\right)$, donc $E \subset F+G$ et $E \cap (F+G)$ est non trivial.

2. Ici, on a $E \cap F \subset F$, donc $(E \cap F) + (E \cap G) \subset F + (E \cap G)$, de plus $E \cap F, E \cap G \subset E$ entraîne $(E \cap F) + (E \cap G) \subset E$, d'où

$$(E \cap F) + (E \cap G) \subset E \cap (F + (E \cap G))$$

Réciproquement, un élément de $E \cap (F + (E \cap G))$ est de la forme $f+g$, avec $f \in F, g \in E \cap G$ et $f+g \in E$. Mais comme $f+g, g \in E$, on a $f+g-g = f \in E$, donc f appartient en fait à $E \cap F$, d'où

$$E \cap (F + (E \cap G)) \subset (E \cap F) + (E \cap G)$$

Donc les deux ensembles sont en fait égaux.

Exercice 6.
1. Comme $A, B \subset A \cup B$, on a $\text{Vect}\, A \cup \text{Vect}\, B \subset \text{Vect}(A \cup B)$, mais la réciproque est en général fausse : dans $\mathbb{R}^2$, considérant $A = \binom{1}{0}$ et $B = \binom{0}{1}$, on a que $A \cup B$ est une base, donc $\text{Vect}\, A \cup B = \mathbb{R}^2$, et pourtant $\text{Vect}\, A \cup \text{Vect}\, B$ est une union de deux droites, jamais égale à tout le plan...

2. À nouveau, comme $A \cap B \subset A, B$, on a $\text{Vect}\, A \cap B \subset \text{Vect}\, A \cap \text{Vect}\, B$, mais à nouveau la réciproque est fausse : dans R^2, pour

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On a que A et B sont deux bases de $\mathbb{R}^2$, avec $A \cap B = \varnothing$, donc $\text{Vect}\, A \cap \text{Vect}\, B = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ et $\text{Vect}\, A \cap B = \{0\}$.

3. Là encore, on a $A \subset \text{Vect}\, A$ donc $\text{Vect}\, A \subset \text{Vect}(\text{Vect}(A))$. Mais ici on a la réciproque, revenons à la définition : $\text{Vect}\, A$ est le plus petit sev de E qui contient A, et $\text{Vect}(\text{Vect}(A))$ est le plus petit sev de E qui contient $\text{Vect}(A)$, or $\text{Vect}\, A$ contient $\text{Vect}(A)$ et c'est un sev, donc il contient $\text{Vect}(\text{Vect}(A))$: $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) \subset \text{Vect}(A)$ et on a terminé.

Exercice 7. Montrons que $\varphi(M')$ est un sous-module de N : on a

$$\varphi(M') = \{\varphi(m) \mid m \in M'\}$$

- $\varphi(M')$ est stable par somme : $\varphi(m) + \varphi(m') = \varphi(m+m')$ et $m+m' \in M$ car c'est un sous-module de M.
- $\varphi(M')$ est stable par multiplication scalaire : $r\varphi(m) = \varphi(rm)$ et $rm \in M$ car c'est un sous-module de M.

Montrons ensuite que $\varphi^{-1}(N')$ est un sous-module de M : on a

$$\varphi^{-1}(N') = \{m \in M \mid \varphi(m) \in N'\}$$

Pour $m, m' \in \varphi^{-1}(M)$ et $r \in R$, on a

$$\varphi(rm + m') = r\varphi(m) + \varphi(m') \in N'$$

car $\varphi(m), \varphi(m') \in N'$ et que c'est un sous-module de N.