TD 5 - Complexité

Exercice 1. Montrer que si $f \in O(g)$ et $g \in O(h)$, alors $f \in O(h)$.

Exercice 2. Soit n un entier, et soit $k = L(n) = \log_2(n) + 1$ sa longueur.

1. Montrer que $L(n) \in O(\ln(n))$
2. Montrer que, pour tout entier $m > 0$, on a $L(n^m) \in O(km)$.
3. Montrer que tout entier $n' \leqslant n$ est tel que $L(n') \leqslant k$. En déduire que $L(n!) \in O(kn) \subset O(\ln(n)n)$

Exercice 3. Soient M et M' deux matrices $n \times n$, dont les coefficients entiers sont bornés en valeurs absolues par m. Montrer que le calcul du produit MM' a une complexité en $O(n^3(\ln^2(m) + \ln(m)))$.

Exercice 4. On considère la formule suivante, montrée lors du TD1 :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Montrer que le nombre d'opérations nécessaires pour calculer le membre de gauche est en $O(n \ln^2(n))$
2. Montrer que le nombre d'opérations nécessaires pour calculer le membre de droite est en $O(\ln^2(n))$.

À partir d'ici, on néglige la longueur des entiers : les opérations élémentaires sont $+, \times, -, \div$

Exercice 5. Soient n et m deux entiers. Montrer que la complexité de l'exponentiation naïve est en $O(m)$, tandis que la complexité de l'exponentiation rapide est en $O(2\ln(m))$.

Exercice 6. On s'intéresse à la complexité de la méthode du pivot de Gauss.

1. On note $T(n)$ le nombre d'opérations nécessaires pour échelonner une matrice de taille $n \times n$. Montrer que $T(n) \in O(T(n-1) + n^2)$
2. En déduire que $T(n) \in O(n^3)$.

Exercice 7. On s'intéresse à la complexité du calcul du déterminant d'une matrice.

1. On pose $T(n)$ le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour calculer $\det(M)$ via un développement par rapport à la première colonne. Montrer que $T(n) \in O(n!)$.
2. Donner un algorithme permettant de calculer $\det M$ en utilisant le pivot de Gauss. Montrer que la complexité de ce nouvel algorithme est en $O(n^3)$.