TD 3 - Fractions continues

† *Premières fractions continues*

Exercice 1. Soit $x = [a_0; a_1 \ldots, a_n]$ une fraction continue.

- Montrer que $x = [a_0; [a_1; \ldots, a_n]]$ et que $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-2}, [a_{n-1}; a_n]] = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}]$
- Montrer que $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$

Exercice 2. 1. Déterminer $d := 1004 \wedge 768$, et trouver $(x, y) \in \mathbb{Z}$ tels que

$$1004x + 768y = d$$

2. Donner la fraction continue de $\frac{1004}{768}$.
3. Donner les (valeurs approchées des) approximations successives de $\frac{1004}{768}$.

Exercice 3. 1. Donner les fractions continues des nombres rationnels $\frac{119}{32}$ et $\frac{46}{39}$.

2. Donner les fractions continues des nombres irrationnels $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$.
3. Trouver les nombres représentés par

$$[3; 1, 1, 4, 1, 3], \quad [2; 1, 1, 3, 1, 1, 2], \quad [0; 2, 4, 1, 5], \quad [-5; 1, 3, 2, 4]$$

4. Donner les nombre positif correspondant aux fractions continues simple périodique $[\overline{1}]$, $[-1, 2, \overline{1}]$, et $[\overline{4, 1, 3}]$.

Exercice 4. Soit $x = [a_0; a_1, \ldots]$ une fraction continue. On pose

$$\begin{aligned} h_{-2} &:= 0, \quad h_{-1} := 1, \quad h_p = a_p h_{p-1} + h_{p-2} \\ k_{-2} &= 1, \quad k_{-1} = 0, \quad k_p = a_p k_{p-1} + k_{p-2} \end{aligned}$$

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

1. $[a_0; a_1, \ldots, a_p] = \frac{h_p}{k_p} = \frac{a_p h_{p-1} + h_{p-2}}{a_p k_{p-1} + k_{p-2}}$
2. $a_p = -\frac{h_p k_{p-2} - h_{p-2} k_p}{h_p k_{p-1} - h_{p-1 k_p}} = -\frac{[a_0; a_1, \ldots, a_p] k_{p-2} - h_{p-2}}{[a_0; a_1, \ldots, a_p] k_{p-1} - h_{p-1}}$
3. $h_{p-1} k_p - h_p k_{p-1} = (-1)^p$

† *Nombres quadratiques*

On considère des équations quadratiques à coefficients entiers, c'est-à-dire des équations de la forme

$$\alpha X^2 + \beta X + \gamma = 0 \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

On supposera toujours que $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0$.

Exercice 5. (Nombres quadratiques) On dit qu'une solution d'une équation de la forme (1) est un ***nombre quadratique***

1. Montrer qu'un nombre est quadratique si et seulement si il est racine d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Q}[X]$ de degré au plus 2.

2. Montrer que les nombres quadratiques sont de la forme $a+b\sqrt{d}$ où a, b sont des rationnels et d est un entier positif. Donner a, b et d en fonction de α, β, γ.
3. Réciproquement, monter qu'un nombre de la forme $a+b\sqrt{d}$ où a, b sont des rationnels et d est un entier positif est un nombre quadratique. Donner des valeurs de α, β, γ en fonction de a, b et d.

Exercice 6. (Conjugué) Soit x un nombre quadratique. Son ***polynôme minimal*** est le polynôme unitaire dans $\mathbb{Q}[X]$ de plus petit degré dont x est une racine.

1. Montrer l'existence et l'unicité du polynôme minimal d'un nombre quadratique dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que le polynôme minimal de x est de degré 1 si et seulement si x est rationnel.

On définit alors le ***conjugué*** de x (noté x_c) comme l'autre racine du polynôme minimal de x (si $x \in \mathbb{Q}$, on pose $x_c = x$).

3. Montrer que si le polynôme minimal de x est de la forme X^2+b, alors $x_c = -x$.
4. En écrivant $x = a+b\sqrt{d}$ comme dans l'exercice précédent, écrire x_c en fonction de x.
5. On suppose x irrationnel, on pose $T(x) := x + x_c$ et $N(x) = xx_c$. Montrer que le polynôme minimal de x peut s'écrire dans $\mathbb{Q}[X]$ comme $X^2 - T(x)X + N(x)$.
6. Soient x un nombre quadratique irrationnel et $u, v \in \mathbb{Q}$. Montrer que $(ux+v)_c = ux_c + v$ et que, si $x \neq 0$, alors $(\frac{1}{x})_c = \frac{1}{x_c}$.

† *Équation de Pell-Fermat*

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre l'équation de Pell-Fermat : (E_d) : $h^2 - dk^2 = \pm 1$. Où h et k sont des entiers bien-sûr.

Exercice 7. (Premiers constats).

1. On suppose que d a un facteur carré : c'est-à-dire que $d = a^2 d'$ où a et d sont des entiers. Donner une bijection entre les solutions de E_d et celles de $E_{d'}$.
2. On suppose à partir d'ici que d est sans facteurs carrés. Montrer que E_d est équivalente à
$$\left(\frac{h}{k} - \sqrt{d}\right)\left(\frac{h}{k} + \sqrt{d}\right) = \frac{\pm 1}{k^2}$$
En déduire que $\left|\frac{h}{k} - \sqrt{d}\right| \leqslant \frac{1}{2k^2}$

On étudie la décomposition en fraction continue de $x := \sqrt{d}$. On pose $\sqrt{d} = [a_0; a_1, \ldots]$ et $x_n := [a_n; a_{n+1}, \ldots]$. On admet que $\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_p}]$ est périodique de période p. On admet également que pour $n \geqslant 1$, x_n est strictement supérieur à son conjugué $(x_n)_c$ (cf Exercice 6)

Exercice 8. On rappelle (cf Exercice 4) qu'il existe deux suites d'entiers $(h_n)_{n \geqslant -2}$ et $(k_n)_{n \geqslant -2}$ telles que $k_n \geqslant 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = -\frac{xk_{n-2} - h_{n-2}}{xk_{n-1} - h_{n-1}} \text{ et } h_{n-1}k_{n-2} - k_{n-1}h_{n-2} = (-1)^n$$

1. Soient V_n les rationnels définis par $\forall n \in \mathbb{N},\ (-1)^n V_n := N(xk_{n-1} - h_{n-1})$ (N est la notation introduite dans l'exercice 6). Développer et simplifier $(-1)^n V_n x_n$ de manière à l'écrire comme la somme de $(-1)^n\sqrt{d}$ et d'un rationnel. En déduire que $Vx_n - \sqrt{d}$ est rationnel.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'autre rationnel V tel que $Vx_n - \sqrt{d} \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que les rationnels V_n sont positifs (*indication : montrer et utiliser que* $V_n x_n - \sqrt{d} = V_n(x_n)_c + \sqrt{d}$). En déduire que $N(xk_{n-1} - h_{n-1}) = \pm 1$ si et seulement si $V_n = 1$.
4. Montrer que si n est un multiple de p, alors $x_n - x$ est entier (on utilisera la relation $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$). En déduire que $V_n = 1$.
5. En déduire une famille de solutions de l'équation de Pell-Fermat (*indication : développez* $N(xk_{n-1} - h_{n-1})$).

Exercice 9. (Application) Appliquez la méthode de l'exercice précédent aux équations de Pell-Fermat E_{11} et E_{41} : calculez les périodes p, et deux premiers couples de solutions pour chaque équation.