TD 2 - Congruence, restes Chinois

† *Congruences et divisibilité*

Exercice 1. Soient cinq entiers a, b, c, d, n. On suppose que $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$. Montrer que

$$a + c \equiv b + d[n] \quad \text{et} \quad ac \equiv bd[n]$$

Exercice 2. (Critères de divisibilité)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Montrer les critères de divisibilité suivants : n est divisible par
   - 2 si et seulement si son dernier chiffre est divisible par 2
   - 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3
   - 4 si et seulement si l'entier formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
   - 5 si et seulement si son dernier chiffre est égal à 5 ou à 0.
   - 6 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 et son dernier chiffre est divisible par 2.
   - 7 si et seulement si son nombre de dizaines (pas son chiffre des dizaines, son nombre : 1047 donnerai 104) plus 5 fois le dernier chiffre est divisible par 7.
   - 8 si et seulement si l'entier formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.
   - 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
   - 11 si et seulement si son nombre de dizaines moins son dernier chiffre est divisible par 11.
2. Soit k un entier premier avec 10 et soit j tel que $10j \equiv 1[k]$. Montrer que n est divisible par k si et seulement son nombre de dizaines plus j fois son dernier chiffre est divisible par k.

Exercice 3.

1. Trouver tous les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.
2. Disposer les nombres $2, 3, \cdots, 16$ en couples a, b tels que chaque couple vérifie $ab \equiv 1[17]$.
3. Donner l'inverse de chaque classe de congruence non nulle modulo 13.

Exercice 4.

1. Donner les restes ($\geqslant 0$) les plus petits possibles de $10^k + 1$ modulo 13 pour $k = 1, 2, 3, 4$.
2. Donner le plus petit reste ($\geqslant 0$) de 5^{22} modulo 23
3. Montrer que chaque entier est congru modulo 9 à un unique entier r avec $-4 \leqslant r \leqslant 4$.
4. Soient p un nombre premier impair et $a, b \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que si $a \wedge p = 1$, alors $f_p(a) := \frac{a^{p-1}-1}{p}$ est un entier.
   b) Montrer que si $ab \wedge p = 1$, alors $f_p(ab) \equiv f_p(a) + f_p(b)[p]$.

Exercice 5.

1. Soient p un nombre premier et a un entier non multiple de p. Rappelons que par convention, $a^0 = 1$. Montrer que la suite $(a^n\ [p])$ est périodique.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $2^n\ [7]$. Quelle est la période de la suite $(2^n\ [7])$.
3. Même question pour $(3^n\ [7])$.

† *Équations en congruence*

Exercice 6.

1. Trouver le plus petit entier positif (> 2) tel que

$$\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 1[5] \\ x \equiv 1[7] \end{cases}$$

2. Trouver le plus petit entier positif (> 2) tel que

$$\begin{cases} x \equiv -1[7] \\ x \equiv -1[11] \\ x \equiv -1[13] \end{cases}$$

Exercice 7.

1. Trouver les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $261x + 2$ soit un multiple de 305.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Trouver les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} x \equiv a[12] \\ x \equiv b[19] \end{cases}$

Exercice 8. Trouver toutes les solutions des systèmes de congruences suivants

$$\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 3[5] \\ x \equiv 5[2] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \equiv 1[4] \\ x \equiv 0[3] \\ x \equiv 0[7] \end{cases}$$

Exercice 9. Soient a, b, n trois entiers strictement positifs.

1. Montrer que l'équation $ax \equiv b[n]$ a au moins une solution si et seulement si $a \wedge n$ divise b.
2. Montrer que l'équation $ax \equiv b[n]$ admet une unique solution si et seulement si $a \wedge n = 1$.

Exercice 10. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère le système $\begin{cases} x \equiv a[21] \\ x \equiv b[24] \end{cases}$.
À quelle condition existe-t-il au moins une solution ? Sous cette condition, donner toutes les solutions du système.