TD 1 - Récurrence, Ératosthène et Euclide

† *Principe de récurrence*

Exercice 1.

1. Soit la propriété suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$: P_n : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
   Monter par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Même question pour la propriété P_n : $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Même question pour la propriété P_n : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

Exercice 2. (Qu'est-ce qui se passe si j'enlève ça ?)

1. a) Soit la propriété $P_n : n + n = n$. Montrer que P_0 est vraie.
   b) Peut-on en déduire que P_n est vraie pour tout n ?
   c) Prouver qu'en fait, P_n est fausse pour $n > 1$.
2. a) Soit la propriété $P_n : 9^{n+1} - 9^n$ est divisible par 10. Montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.
   b) Peut-on en déduire que P_n est vraie pour tout n ?
   c) Prouver que P_0 est fausse. (*P_n est en fait fausse pour tout n, on le verra avec les congruences)*

Exercice 3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

1. Le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.
2. Le produit $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.
3. Les entiers $2n+1$ et $3n+2$ sont permiers entre eux.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $f(n) = 10^n + 3 \times 4^{n+2} + 5$.

1. Montrer que $f(n+1) - f(n)$ est divisible par 9 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $f(n)$ est divisible par 9 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

† *Divisibilité.*

Exercice 5. (Crible d'Ératosthène)

1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas premier, alors n admet un diviseur inférieur à $\sqrt{n}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$, et soit L une liste des entiers $[\![2, N]\!]$. On procède récursivement à partir de 2. On enlève de la liste tous les multiples de l'entier le plus petit de la liste, on écrit ensuite cet entier dans la liste des premiers. Montrer que ce procédé décrit les nombres premiers de l'intervalle $[\![2, N]\!]$.
3. Rédiger un algorithme `Eratosthene`, qui prend en entrée N et qui renvoie une liste qui contient tous les nombres premiers compris entre 2 et N. Cet algorithme est il efficace ?
4. Calculer explicitement les nombres premiers inférieurs à 120 sur la liste ci dessous :

~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

5. Déduire un algorithme `EstPremier` qui prend en entrée un entier N, et renvoie vrai si N est premier, faux sinon. Cet algorithme est il efficace ?

Exercice 6. 1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

2. Soient a et b deux entiers tels que ab soit divisible par p.
   a) Monter que si p ne divise pas a, alors $ba \wedge bp = b$.
   b) En déduire qu'alors, p divise b.
   c) En déduire le Lemme d'Euclide : si un nombre premier p divise un produit ab, alors p divise a ou b.
3. Montrer que tout entier positif s'écrit de manière unique comme produit de nombres premiers.
   (Indication : pour l'existence, récurrence forte, pour l'unicité, question précédente).

† *PGCD, Algorithme d'Euclide, identité de Bézout*

Exercice 7. Soient a et b deux entiers positifs premiers entre eux. Calculer $(a+b) \wedge (a-b)$ (discuter selon les parités de a et de b).

Exercice 8.

1. Calculer $165 \wedge 35$ et $165 \vee 35$.
2. Calculer $28 \wedge 16$.
3. Calculer $27 \wedge 8$.
4. Calculer $24 \wedge 8$.

Exercice 9. 1. Écrire une fonction `Division` prenant en entrée deux entiers m, n et renvoyant en sortie le quotient et le reste de la division euclidienne de m par n. La fonction `Division` n'utilisera bien-sûr que les opérations d'addition, soustraction, multiplication.

2. Écrire une fonction `AlgEuclide`, prenant en entrée deux entiers m, n et envoyant en sortie le pgcd de m et n.

Exercice 10. Soient n, m deux entiers.

1. Soit p un nombre premier, montrer que p divise m et n si et seulement si p divise $m \wedge n$.
2. Montrer que la décomposition en facteur premiers de $n \wedge m$ est donnée par l'intersection de celles de n et de m.
3. En déduire un nouvel algorithme `Bourrin` prenant en entrée deux entiers m, n et envoyant en sortie le pgcd de m et n.
4. Comparer l'efficacité de `AlgEuclide` et de `Bourrin`.

Exercice 11. 1. Trouver tous les entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $15x - 22y = 1$.

2. Trouver tous les entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $15x - 22y = 0$.
3. Trouver tous les entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $15x + 24y = 5$.
4. Soit $c \in \mathbb{Z}$. Trouver tous les entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $24x + 87y = c$.

Exercice 12. On pose

$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists u, v \in \mathbb{Z} \mid \begin{cases} x = u + v \\ y = 3u + 7v \end{cases} \right\}$$

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a l'équivalence

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow y - 3x \text{ est un multiple de } 4$$