“Devoir” Maison

Exercice 1.

1. Trouver une solution particulière $\ell \in \mathbb{Z}$ de $10\ell \equiv 1[19]$.
2. Montrer que pour tout entier $N \in \mathbb{Z}$, on a $N \equiv 10(D + 2c_0)[19]$, où c_0 est le chiffre des unités de N en base 10 et D est le nombres de dizaines de N
3. Justifier que N est divisible par 19 si et seulement si $D + 2c_0$ est divisible par 19.
4. Utiliser le critère de la question précédente pour montrer que 84721 est divisible par 19.
5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition sur m pour qu'il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $10\ell \equiv 1[m]$. On supposera dans la suite cette condition satisfaite.
6. Montrer que pour tout entier $N \in \mathbb{Z}$, on a $N \equiv 10(D + \ell c_0)[m]$, où c_0 est le chiffre des unités de N en base 10 et D est le nombre de dizaines de N.
7. En déduire un critère de divisibilité par m.

Exercice 2. Pompon est un chat fugueur : il ne revient à sa maison que tous les 23 jours. D'un autre côté, son maître Aurélien travaille beaucoup : il ne passe qu'un jour chez lui par semaine : le mardi. Sachant qu'aujourd'hui nous somme mercredi et que Pompon viendra à sa maison mercredi prochain, déterminer à quel moment Pompon et Aurélien passerons la journée ensemble.

Exercice 3. (Frobenius)
Soit p un nombre premier

1. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$ pour tout k tel que $0 < k < p$.
2. Soit A un anneau (commutatif unitaire) de caractéristique p. Montrer que l'application $\phi : x \mapsto x^p$ est un morphisme d'anneaux $A \to A$. C'est le ***morphisme de Frobenius***. Montrer que $\phi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est en fait l'identité.
3. En déduire que deux polynômes différents dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ peuvent induire la même fonction polynomiale de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans lui-même.

Exercice 4.

1. Donner les fractions continues des nombres rationnels suivants : $\frac{119}{32}$ et $-\frac{46}{39}$.
2. Trouver les nombres représentés par $[3, 1, 1, 4, 1, 3]$, $[-5, 1, 3, 2, 4]$.
3. Justifier que $[3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3]$ n'est pas égal à π.
4. Soit n un entier naturel, et a la partie entière de $\sqrt{n}$. En posant $a + x = \sqrt{n}$, montrer que $x = \frac{n-a^2}{2a+x}$. En déduire que
$$\sqrt{n} = a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \cfrac{n-a^2}{2a + \ddots}}}$$
5. Calculer le développement en fraction continue de $\sqrt{27}$