Correction TD3

† *Premières fractions continues*

Exercice 1.
Dans un premier temps, on pose

$$y = [a_1; \dots, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}$$

On a

$$[a_0; y] = a_0 + \frac{1}{y} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

Pour la deuxième équation, on procède par récurrence sur $n \geqslant 1$. Le premier cas est clair :

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \left[a_0 + \frac{1}{a_1}\right]$$

Pour l'hérédité, on a

$$\begin{aligned}
[a_0, \dots, a_n, a_{n+1}] &= [a_0, [a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]] \\
&= [a_0, [a_1, \dots, [a_n, a_{n+1}]]] \\
&= [a_0, a_1, \dots, [a_n, a_{n+1}]] \\
&= \left[a_0, a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right]
\end{aligned}$$

Le troisième point se vérifie également par une récurrence immédiate, partant de $[a_n] = a_n - 1 + 1 = a_n - 1 + \frac{1}{1} = [a_n - 1, 1]$

Exercice 2.
1. Une fois encore, on effectue l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
1004 &= 768 \cdot 1 + 236 \\
768 &= 236 \cdot 3 + 60 \\
236 &= 60 \cdot 3 + 56 \\
60 &= 56 \cdot 1 + 4 \\
56 &= 4 \cdot 14 + 0
\end{aligned}$$

On remonte cet algorithme pour obtenir $1004 \cdot (-13) + 768 \cdot 17 = 4$.

2. En divisant la première ligne de l'algorithme d'Euclide précédent par 768, on obtient

$$\frac{1004}{768} = 1 + \frac{236}{768} = 1 + \frac{1}{\frac{768}{236}} = \left[1, \frac{768}{236}\right]$$

On est donc ramenés à trouver la décomposition de $\frac{768}{236}$ en fraction continue, on regarde donc la deuxième ligne de l'algorithme d'Euclide précédent, pour obtenir :

$$\frac{768}{236} = 3 + \frac{60}{236} = \left[3, \frac{236}{60}\right]$$

On obtient de même avec les deernières lignes :

$$\frac{236}{60} = \left[1, \frac{60}{56}\right], \ \frac{60}{56} = \left[1, \frac{56}{4}\right] = [1, 14]$$

On obtient, en réinjectant successivement :

$$\begin{aligned}\frac{1004}{768} &= \left[1, \frac{768}{236}\right] \\ &= \left[1, 3, \frac{236}{60}\right] \\ &= \left[1, 3, 3, \frac{60}{56}\right] \\ &= [1, 3, 3, 1, 14]\end{aligned}$$

On s'aperçoit d'ailleurs que les coefficients de cette fraction continues sont les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide.

On s'intéresse aux convergents successifs $[1], [1, 3], [1, 3, 3], [1, 3, 3, 1], [1, 3, 3, 1, 14]$. On a clairement $[1] = 1$ et $[1, 3] = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,333333$. Pour les autres, on utilise récursivement le premier exercice :

$$\begin{aligned}[1, 3, 3] &= \left[1, 3 + \frac{1}{3}\right] \\ &= \left[1, \frac{10}{3}\right] \\ &= 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10} = 1,3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1, 3, 3, 1] &= \left[1, 3, 3 + \frac{1}{1}\right] = [1, 3, 4] \\ &= \left[1, 3 + \frac{1}{4}\right] = \left[1, \frac{13}{4}\right] \\ &= 1 + \frac{4}{13} = \frac{17}{13} \approx 1.307692\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1, 3, 3, 1, 14] &= \left[1, 3, 3, 1 + \frac{1}{14}\right] = \left[1, 3, 3, \frac{15}{14}\right] \\ &= \left[1, 3, 3 + \frac{14}{15}\right] = \left[1, 3, \frac{59}{15}\right] \\ &= \left[1, 3 + \frac{15}{59}\right] = \left[1, \frac{192}{59}\right] \\ &= 1 + \frac{59}{192} = \frac{251}{192} = \frac{1004}{768} \approx 1,30729166\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}119 &= 32 \cdot 3 + 23 \\ 32 &= 23 \cdot 1 + 9 \\ 23 &= 9 \cdot 2 + 5 \\ 9 &= 5 \cdot 1 + 4 \\ 5 &= 4 \cdot 1 + 1 \\ 4 &= 1 \cdot 4 + 0\end{aligned}$$

La décomposition en fraction continue de $\frac{119}{32}$ est donnée par les quotients successifs dans l'algorithme d'Euclide : $\frac{119}{32} = [3, 1, 2, 1, 1, 4]$. On fait le même raisonnement pour le deuxième cas :

$$\begin{aligned}
46 &= 39 \cdot 1 + 7 \\
39 &= 7 \cdot 5 + 4 \\
7 &= 4 \cdot 1 + 3 \\
4 &= 3 \cdot 1 + 1 \\
3 &= 1 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$

On trouve alors $\frac{46}{39} = [1, 5, 1, 1, 3]$.

2. Pour les nombres irrationnels, hélas plus d'algorithme d'Euclide. Pour racine de 5, on a $2^2 < 5 < 3^2$, donc la partie entière de $\sqrt{5}$ est $\lfloor\sqrt{5}\rfloor = 2$. On a alors

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = \left[2, \frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right]$$

Il reste donc à trouver la décomposition en fraction continue de $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$. On a

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$$

Dont la partie entière est $2 + 2 = 4$. On a alors

$$\sqrt{5} = [2, \sqrt{5} + 2] = \left[2, 4, \frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right]$$

On retrouve $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$, en appliquant le même calcul, on trouve

$$\sqrt{5} = \left[2, 4, 4, \frac{1}{\sqrt{5} - 2}\right] = [2, \overline{4}]$$

Pour $\sqrt{7}$ c'est un peu plus long. On a également $\lfloor\sqrt{7}\rfloor = 2$ et (en utilisant l'expression conjuguée)

$$\begin{aligned}
\sqrt{7} &= \left[2, \frac{1}{\sqrt{7} - 2}\right] \\
&= \left[2, \frac{\sqrt{7} + 2}{3}\right] = \left[2, 1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{3}\right] = \left[2, 1, \frac{3}{\sqrt{7} - 1}\right] \\
&= \left[2, 1, \frac{\sqrt{7} + 1}{2}\right] = \left[2, 1, 1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{2}\right] = \left[2, 1, 1, \frac{2}{\sqrt{7} - 1}\right] \\
&= \left[2, 1, 1, \frac{\sqrt{7} + 1}{3}\right] = \left[2, 1, 1, 1 + \frac{\sqrt{7} - 2}{3}\right] = \left[2, 1, 1, 1, \frac{3}{\sqrt{7} - 2}\right] \\
&= \left[2, 1, 1, 1, \sqrt{7} + 2\right] = \left[2, 1, 1, 1, 4, \frac{1}{\sqrt{7} - 2}\right]
\end{aligned}$$

Youpi ! On est retombés sur $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$, donc avec les mêmes arguments, on obtient $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$

3. On applique à nouveau les techniques de l'exercice 1.

$$\begin{aligned}
[3,1,1,4,1,3] &= \left[3,1,1,4,1+\frac{1}{3}\right] = \left[3,1,1,4,\frac{4}{3}\right] \\
&= \left[3,1,1,4+\frac{3}{4}\right] = \left[3,1,1,\frac{19}{4}\right] \\
&= \left[3,1,1+\frac{4}{19}\right] = \left[3,1,\frac{23}{19}\right] \\
&= \left[3,1+\frac{19}{23}\right] = \left[3,\frac{42}{23}\right] \\
&= 3+\frac{23}{42} = \frac{149}{42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[2,1,1,3,1,1,2] &= \left[2,1,1,3,1,1+\frac{1}{2}\right] = \left[2,1,1,3,1,\frac{3}{2}\right] \\
&= \left[2,1,1,3,1+\frac{2}{3}\right] = \left[2,1,1,3,\frac{5}{3}\right] \\
&= \left[2,1,1,3+\frac{3}{5}\right] = \left[2,1,1,\frac{18}{5}\right] \\
&= \left[2,1,1+\frac{5}{18}\right] = \left[2,1,\frac{23}{18}\right] \\
&= \left[2,1+\frac{18}{23}\right] = \left[2,\frac{41}{23}\right] \\
&= 2+\frac{23}{41} = \frac{105}{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[0,2,4,1,5] &= \left[0,2,4,1+\frac{1}{5}\right] = \left[0,2,4,\frac{6}{5}\right] \\
&= \left[0,2,4+\frac{5}{6}\right] = \left[0,2,\frac{29}{6}\right] \\
&= \left[0,2+\frac{6}{29}\right] = \left[0,\frac{64}{29}\right] \\
&= \frac{29}{64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[-5,1,3,2,4] &= \left[-5,1,3,2+\frac{1}{4}\right] = \left[-5,1,3,\frac{9}{4}\right] \\
&= \left[-5,1,3+\frac{4}{9}\right] = \left[-5,1,\frac{31}{9}\right] \\
&= \left[-5,1+\frac{9}{31}\right] = \left[-5,\frac{40}{31}\right] \\
&= -5+\frac{31}{40} = \frac{-169}{40}
\end{aligned}$$

4. Pour les fractions continues infinies, il n'est plus question d'appliquer l'algorithme précédent : il commence à la fin de la fraction continue. Cependant, dans le cas d'une fraction continue périodique, on peut s'en sortir en faisant apparaître une équation (quadratique) que respecte notre inconnue.

Posons $x = [\overline{1}]$, on a trivialement

$$x = [1,1,1,\ldots] = [1,[1,1,\ldots]] = [1,x] = 1 + \frac{1}{x}$$

Donc $x^2 = x + 1$, il y a deux solutions de cette équation : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\widetilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Une seule des deux est positive : c'est φ, qui est alors égale à x (car x est positif : le premier terme de son développement en fraction continue est positif).

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
[-1,2,\overline{1}] &= \left[-1, 2 + \frac{1}{\varphi}\right] \\
&= [-1, 2 + \varphi - 1] \\
&= [-1, \varphi + 1] \\
&= [-1, \varphi^2] \\
&= -1 + \frac{1}{\varphi^2} \\
&= \frac{1 - \varphi^2}{\varphi^2} \\
&= \frac{-\varphi}{\varphi^2} = \frac{-1}{\varphi} = \widetilde{\varphi}
\end{aligned}$$

Enfin, pour le dernier nombre z, on a $z = [\overline{4,1,3}] = [4,1,3,\overline{4,1,3}] = [4,1,3,z]$. Donc

$$\begin{aligned}
z &= [4,1,3,z] \\
&= \left[4, 1, \frac{3z+1}{z}\right] \\
&= \left[4, \frac{4z+1}{3z+1}\right] \\
&= 4 + \frac{3z+1}{4z+1} = \frac{19z+5}{4z+1}
\end{aligned}$$

Donc $z(4z+1) = 4z^2 + z = 19z + 5$ et $4z^2 - 18z - 5 = 0$. Les solutions de cette dernière équation sont $\frac{9 \pm \sqrt{101}}{4}$. Une seule de ces solutions est positive, et z est positif car le premier terme de son développement en fraction continue est positif. D'où $z = \frac{9+\sqrt{101}}{4}$.

Exercice 4.

1. On procède par récurrence sur p : Le cas $p = 0$ est immédiat :

$$[a_0] = a_0 = \frac{a_0 h_{-1} + h_{-2}}{a_0 k_{-1} + k_{-2}}$$

Pour l'hérédité, suppose la propriété vraie pour un entier p et on cherche à la démontrer pour $p+1$. On considère la fraction continue $[b_0, \cdots, b_p]$ définie par

$$\begin{cases} b_i = a_i & \text{si } i \in [\![0, p-1]\!] \\ b_p = a_p + \frac{1}{a_{p+1}} \end{cases}$$

On sait que $[b_0, \cdots, b_p] = [a_0, \cdots, a_p, a_{p+1}]$ par le premier exercice. Ensuite, on définit $(h'_n)_{n \geqslant -2}$ et $(k'_n)_{n \geqslant -2}$ les deux suites associées à la fraction continue $[b_0, \ldots, b_p]$. Comme $a_i = b_i$ pour $i \leqslant p-1$, on a $h_i = h'_i$ et $k_i = k'_i$

pour $i \leqslant p-1$.
Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
[a_0, \ldots, a_{p+1}] = [b_0, \ldots, b_p] &= \frac{b_p h'_{p-1} + h'_{p-2}}{b_p k'_{p-1} + k'_{p-2}} \\
&= \frac{\left(a_p + \frac{1}{a_{p+1}}\right) h_{p-1} + h_{p-2}}{\left(a_p + \frac{1}{a_{p+1}}\right) k_{p-1} + k_{p-2}} \\
&= \frac{a_p h_{p-1} + h_{p-2} + \frac{h_{p-1}}{a_{p+1}}}{a_p k_{p-1} + k_{p-2} + \frac{k_{p-1}}{a_{p+1}}} \\
&= \frac{h_p + \frac{h_{p-1}}{a_{p+1}}}{k_p + \frac{k_{p-1}}{a_{p+1}}} \\
&= \frac{a_{p+1} h_p + h_{p-1}}{a_{p+1} k_p + k_{p-1}}
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement la propriété voulue pour l'entier $p+1$. On conclut par le principe de récurrence.

2. Ici, pas besoin de récurrence : on peut se servir de la première question. Pour alléger les notations, on fixe un entier p et on pose

$$\begin{cases}
A := [a_0, \ldots, a_p] \\
a := a_p \\
h := h_{p-1} \\
h' := h_{p-2} \\
k := k_{p-1} \\
k' := k_{p-2}
\end{cases}$$

Ainsi, la première question nous donne

$$\begin{aligned}
A = \frac{ah + h'}{ak + k'} &\Leftrightarrow A(ak + k') = ah + h' \\
&\Leftrightarrow Aak + Ak' = ah + h' \\
&\Leftrightarrow Aak - ah = -Ak' + h' \\
&\Leftrightarrow a(Ak - h) = -Ak' + h' \\
&\Leftrightarrow a = \frac{-Ak' + h'}{Ak - h} \\
&\Leftrightarrow a_p = -\frac{[a_0, \ldots, a_p] k_{p-2} - h_{p-2}}{[a_0, \ldots, a_p] k_{p-1} - h_{p-1}}
\end{aligned}$$

Soit le résultat voulu.

3. Une fois encore, on raisonne par récurrence, en utilisant la définition (récursive) de h_p et k_p. L'initialisation est

$$h_{-2} k_{-1} - h_{-1} k_{-2} = 0 - 1 = -1 = (-1)^{-1}$$

Pour l'hérédité, on suppose la propriété vraie pour un entier de la forme $p-1$ (i.e $h_{p-2}k_{p-1} - h_{p-1}k_{p-2} = (-1)^{p-1}$) et on cherche à la montrer pour p :

$$\begin{aligned}
h_{p-1} k_p - h_p k_{p-1} &= h_{p-1}(a_p k_{p-1} + k_{p-2}) - (a_p h_{p-1} + h_{p-2}) k_{p-1} \\
&= a_p h_{p-1} k_{p-1} + h_{p-1} k_{p-2} - a_p h_{p-1} k_{p-1} - h_{p-2} k_{p-1} \\
&= h_{p-1} k_{p-2} - h_{p-2} k_{p-1} = -(-1)^{p-1} = (-1)^p
\end{aligned}$$

Soit le résultat voulu, on conclut par le principe de récurrence.

† *Nombres quadratiques*

Exercice 5.
1. Soit x un nombre quadratique, on a
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$
avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.
- Si $\alpha = 0$, alors l'équation est de la forme $\beta X + \gamma = 0$, on a alors $\beta \neq 0$ (sans quoi l'équation est vide). On divise alors par β pour obtenir $x + \frac{\gamma}{\beta} = 0$. C'est un polynôme de degré 1 unitaire dans $\mathbb{Q}[X]$ dont x est racine.
- Si $\alpha \neq 0$, alors on a $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$, c'est un polynôme unitaire de degré 2 dans $\mathbb{Q}[X]$ dont x est une racine.

Réciproquement, si x est racine d'un polynôme unitaire de degré $\leqslant 2$ dans $\mathbb{Q}[X]$:
$$X^2 + \frac{p}{q}X + \frac{a}{b} = 0$$
En multipliant par qb, on obtient que x est solution du polynôme dans $\mathbb{Z}[X]$:
$$qbX^2 + pbX + aq = 0$$
ce qui prouve que x est un nombre quadratique.

2. Reprenons l'équation (1). Si $\Delta = 0$, alors les solutions sont de la forme $\frac{-\beta}{\alpha}$, qui est bien de la forme voulue pour $a = \frac{-\beta}{\alpha}$ et $d = 0$. Si $\Delta > 0$, alors les solutions sont $\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, qui est également de la forme voulue.

3. Soit $x = a + b\sqrt{d}$, on a $x^2 = a^2 + b^2 d + 2ab\sqrt{d}$ et $2ax = 2a^2 + 2ab\sqrt{d}$ donc
$$x^2 - 2ax = a^2 + b^2 d + 2ab\sqrt{d} - 2a^2 - 2ab\sqrt{d} = b^2 d - a^2$$
Donc $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 d = 0$, voila un polynôme unitaire de degré 2 dans $\mathbb{Q}[X]$ qui prouve que x est quadratique.

Exercice 6.
1. Soit x un nombre quadratique. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ dont x est racine forme un idéal de $\mathbb{Q}[X]$. Comme $\mathbb{Q}$ est un corps, $\mathbb{Q}[X]$ est principal, et cet idéal est engendré par un polynôme unitaire bien défini : c'est le polynôme minimal.

2. Le polynôme minimal de x dans $\mathbb{Q}[X]$ est de degré 1 si et seulement si il est de la forme $X + b$ avec $b \in \mathbb{Q}$. Ce polynôme admet une seule racine $-b = x$, qui est donc rationnel.

3. Les racines du polynôme minimal sont les racines (éventuellement complexes) de b. Il y en a 2 et elles sont opposées l'une de l'autre, d'où le résultat.

4. Dans l'écriture $x = a + b\sqrt{d}$, on a que x est rationnel si et seulement si $d = 0$. Sinon, le poylnôme minimal de x est donné par $X^2 - 2ax + a^2 - b^2 d$ d'après l'exercice précédent. On a $\Delta = 4a^2 - 4a^2 + 4b^2 d = 4b^2 d > 0$, les solutions de ce polynôme sont alors
$$\frac{2a \pm 2b\sqrt{d}}{2} = 2a \pm b\sqrt{d}$$
On obtient donc que l'autre racine x_c est égale à $a - b\sqrt{d}$.

4. Si x n'est pas rationnel et son polynôme minimal P est de degré 2, on a
$$P = (X - x)(X - x_c) = X^2 - xX - x_c X + x x_c = X^2 - T(x)X + N(x)$$

5. Soit $x = a + b\sqrt{d}$, on a $ux + v = ua + v + bu\sqrt{d}$, dont le conjugué est $ua + v - bu\sqrt{d} = ux_c + v$. De même, on a
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - b^2 d}$$
dont le conjugué est $\frac{a + b\sqrt{d}}{a^2 - b^2 d} = \frac{1}{x_c}$.

† *Équation de Pell-Fermat*

Exercice 7.
1. Si $d = a^2 d'$, l'équation devient
$$h^2 - d'(ak)^2 = \pm 1$$
Donc (h, k) est une solution de E_d si et seulement si (h, ak) est une solution de $E_{d'}$, voila la bijection voulue.
2. En divisant par k^2, on obtient que E_d équivaut à $\frac{h^2}{k^2} - d = \frac{\pm 1}{k^2}$, on conclut avec une identité remarquable. Ensuite, si (h, k) est une solution, alors $h > k$ et $\frac{h}{k} > 1$, par ailleurs $\sqrt{d} > 1$ également, d'où
$$2\left|\frac{h}{k} - \sqrt{d}\right| \leqslant \left|\frac{h}{k} - \sqrt{d}\right|\left|\frac{h}{k} + \sqrt{d}\right| = \frac{1}{k^2}$$
et le résultat voulu.

Exercice 8.
1. Par construction, les nombres h_n et k_n sont des entiers, en particuliers ils sont égaux à leurs conjuqués. On a alors $(xk_{n-1} - h_{n-1})_c = (x_c k_{n-1} - h_{n-1})$.
Pour alléger les notations, on pose $k := k_{n-1}, h := h_{n-1}$, $h' = h_{n-2}, k' = k_{n-2}$. On sait que $hk' - kh' = (-1)^n$. On a alors
$$\begin{aligned}
(-1)^n V_n x_n &= -N(xk - h)\frac{xk' - h'}{xk - h} \\
&= -(xk - h)(x_c k - h)\frac{xk' - h'}{xk - h} \\
&= -(x_c k - h)(xk' - h') \\
&= -(x_c x k k' - xhk' - x_c h' k + hh') \\
&= -N(x)kk' + hh' + xhk' + x_c h' k \\
&= -N(x)kk' + hh' + xhk' - xh'k \\
&= -N(x)kk' + hh' + x(-1)^n
\end{aligned}$$

Et on a bien que $-N(x)kk' + hh'$ est un rationnel (c'est même un entier).
2. Si V, V' sont deux rationnels tels que $Vx_n - \sqrt{d}$ et $V'x_n - \sqrt{d}$ sont des rationnels. Par soustraction, on a $Vx_n - \sqrt{d} - V'x_n + \sqrt{d} = x_n(V - V') \in \mathbb{Q}$. Si $V - V' \neq 0$, alors par division (comme $V - V' \in \mathbb{Q}$) on obtient que $x_n \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux : $x_n = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$ est un développement en fraction continue infini.
3. Comme $V_n x_n - \sqrt{d}$ est un rationnel, il est égal à son conjugué :
$$V_n x_n - \sqrt{d} = (V_n x_n - \sqrt{d})_c = V_n (x_n)_c + \sqrt{d}$$
On en déduit
$$V_n(x - x_c) = 2\sqrt{d} \Leftrightarrow V_n = \frac{2\sqrt{d}}{x - x_c} > 0$$
car $x > x_c$ par hypothèse. On sait déjà que $N(xk_{n-1} - h_{n-1}) = \pm 1 \Leftrightarrow V_n = (-1)^n N(xk_{n-1} - h_{n-1}) = \pm 1$, comme V_n est positif, $V_n = \pm 1$ si et seulement si $V_n = 1$.
4. La périodicité du développement de x en fraction continue donne $x_1 = [\overline{a_1, \ldots, a_p}] = x_{mp+1}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Si $n = mp$ est un multiple de p, on a
$$x_n - x = a_{mp} + \frac{1}{x_{mp+1}} - a_0 - \frac{1}{x_1} = a_{mp} - a_0 \in \mathbb{N}$$

Le nombre $V = 1$ est donc tel que $x_n - x = Vx_n - \sqrt{d}$ est rationnel (entier). Par la question 2, on trouve alors $V_n = 1$.

5. On développe

$$\begin{aligned}
(-1)^n V_n &= N(xk_{n-1} - h_{n-1}) \\
&= (xk_{n-1} - h_{n-1})(xk_{n-1} - h_{n-1})_c \\
&= (xk_{n-1} - h_{n-1})(x_c k_{n-1} - h_{n-1}) \\
&= xx_c k_{n-1}^2 - x_c h_{n-1} k_{n-1} - x h_{n-1} k_{n-1} + h_{n-1}^2 \\
&= N(x) k_{n-1}^2 - T(x) h_{n-1} k_{n-1} + h_{n-1}^2
\end{aligned}$$

Le polynôme minimal de $x = \sqrt{d}$ est $X^2 - d$, on a alors $x_c = -\sqrt{d}, N(x) = -d, T(x) = 0$. Donc $(-1)^n V_n = -dk_{n-1}^2 + h_{n-1}^2$. Si $V_n = 1$ (ce qui arrive pour $n = mp$ d'après la question précédente) on trouve

$$(-1)^n = h_{n-1}^2 - dk_{n-1}^2$$

soit des solutions de l'équation de Pell-Fermat.

Exercice 9. On calcule les décompositions en fractions rationnelles de 11 et de 41 comme dans l'exercice 3. On trouve $\sqrt{11} = [3, \overline{3, 6}]$ et $\sqrt{41} = [6, \overline{2, 2, 12}]$. Deux solutions de la première équation sont alors données par

$$[3, 3] = \frac{10}{3}, \quad [3, 3, 6, 3] = \frac{199}{60}$$

Deux solutions de la deuxième sont données par

$$[6, 2, 2] = \frac{32}{5}, \quad [6, 2, 2, 12, 2, 2] = \frac{2049}{320}$$