

CORRECTION SÉANCE 5 (13 OCTOBRE)

† *Premières fractions continues*

Exercice 1.

Dans un premier temps, on pose

$$y = [a_1; \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}$$

On a

$$[a_0; y] = a_0 + \frac{1}{y} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

Pour la deuxième équation, on procède par récurrence sur $n \geq 1$. Le premier cas est clair :

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \left[a_0 + \frac{1}{a_1} \right]$$

Pour l'hérédité, on a

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_n, a_{n+1}] &= [a_0, [a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]] \\ &= [a_0, [a_1, \dots, [a_n, a_{n+1}]]] \\ &= [a_0, a_1, \dots, [a_n, a_{n+1}]] \\ &= \left[a_0, a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right] \end{aligned}$$

Le troisième point se vérifie également par une récurrence immédiate, partant de $[a_n] = a_n - 1 + 1 = a_n - 1 + \frac{1}{1} = [a_n - 1, 1]$

Exercice 2.

1. Une fois encore, on effectue l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 1004 &= 768 \cdot 1 + 236 \\ 768 &= 236 \cdot 3 + 60 \\ 236 &= 60 \cdot 3 + 56 \\ 60 &= 56 \cdot 1 + 4 \\ 56 &= 4 \cdot 14 + 0 \end{aligned}$$

On remonte cet algorithme pour obtenir $1004 \cdot (-13) + 768 \cdot 17 = 4$.

2. En divisant la première ligne de l'algorithme d'Euclide précédent par 768, on obtient

$$\frac{1004}{768} = 1 + \frac{236}{768} = 1 + \frac{1}{\frac{768}{236}} = \left[1, \frac{768}{236} \right]$$

On est donc ramené à trouver la décomposition de $\frac{768}{236}$ en fraction continue, on regarde donc la deuxième ligne de l'algorithme d'Euclide précédent, pour obtenir :

$$\frac{768}{236} = 3 + \frac{60}{236} = \left[3, \frac{236}{60} \right]$$

On obtient de même avec les dernières lignes :

$$\frac{236}{60} = \left[1, \frac{60}{56}\right], \quad \frac{60}{56} = \left[1, \frac{56}{4}\right] = [1, 14]$$

On obtient, en réinjectant successivement :

$$\begin{aligned} \frac{1004}{768} &= \left[1, \frac{768}{236}\right] \\ &= \left[1, 3, \frac{236}{60}\right] \\ &= \left[1, 3, 3, \frac{60}{56}\right] \\ &= [1, 3, 3, 1, 14] \end{aligned}$$

On s'aperçoit d'ailleurs que les coefficients de cette fraction continues sont les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide.

On s'intéresse aux convergents successifs $[1], [1, 3], [1, 3, 3], [1, 3, 3, 1], [1, 3, 3, 1, 14]$. On a clairement $[1] = 1$ et $[1, 3] = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,333333$. Pour les autres, on utilise récursivement le premier exercice :

$$\begin{aligned} [1, 3, 3] &= \left[1, 3 + \frac{1}{3}\right] \\ &= \left[1, \frac{10}{3}\right] \\ &= 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10} = 1,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1, 3, 3, 1] &= \left[1, 3, 3 + \frac{1}{1}\right] = [1, 3, 4] \\ &= \left[1, 3 + \frac{1}{4}\right] = \left[1, \frac{13}{4}\right] \\ &= 1 + \frac{4}{13} = \frac{17}{13} \approx 1,307692 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1, 3, 3, 1, 14] &= \left[1, 3, 3, 1 + \frac{1}{14}\right] = \left[1, 3, 3, \frac{15}{14}\right] \\ &= \left[1, 3, 3 + \frac{14}{15}\right] = \left[1, 3, \frac{59}{15}\right] \\ &= \left[1, 3 + \frac{15}{59}\right] = \left[1, \frac{192}{59}\right] \\ &= 1 + \frac{59}{192} = \frac{251}{192} = \frac{1004}{768} \approx 1,30729166 \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 119 &= 32 \cdot 3 + 23 \\ 32 &= 23 \cdot 1 + 9 \\ 23 &= 9 \cdot 2 + 5 \\ 9 &= 5 \cdot 1 + 4 \\ 5 &= 4 \cdot 1 + 1 \\ 4 &= 1 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

La décomposition en fraction continue de $\frac{119}{32}$ est donnée par les quotients successifs dans l'algorithme d'Euclide : $\frac{119}{32} = [3, 1, 2, 1, 1, 4]$. On fait le même raisonnement pour le deuxième cas :

$$\begin{aligned} 46 &= 39 \cdot 1 + 7 \\ 39 &= 7 \cdot 5 + 4 \\ 7 &= 4 \cdot 1 + 3 \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1 \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

On trouve alors $\frac{46}{39} = [1, 5, 1, 1, 3]$.

2. Pour les nombres irrationnels, hélas plus d'algorithme d'Euclide. Pour racine de 5, on a $2^2 < 5 < 3^2$, donc la partie entière de $\sqrt{5}$ est $[\sqrt{5}] = 2$. On a alors

$$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = \left[2, \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \right]$$

Il reste donc à trouver la décomposition en fraction continue de $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$. On a

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2$$

Dont la partie entière est $2 + 2 = 4$. On a alors

$$\sqrt{5} = [2, \sqrt{5} + 2] = \left[2, 4, \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \right]$$

On retrouve $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$, en appliquant le même calcul, on trouve

$$\sqrt{5} = \left[2, 4, 4, \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \right] = [2, \overline{4}]$$

Pour $\sqrt{7}$ c'est un peu plus long. On a également $[\sqrt{7}] = 2$ et (en utilisant l'expression conjuguée)

$$\begin{aligned} \sqrt{7} &= \left[2, \frac{1}{\sqrt{7} - 2} \right] \\ &= \left[2, \frac{\sqrt{7} + 2}{3} \right] = \left[2, 1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{3} \right] = \left[2, 1, \frac{3}{\sqrt{7} - 1} \right] \\ &= \left[2, 1, \frac{\sqrt{7} + 1}{2} \right] = \left[2, 1, 1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{2} \right] = \left[2, 1, 1, \frac{2}{\sqrt{7} - 1} \right] \\ &= \left[2, 1, 1, \frac{\sqrt{7} + 1}{3} \right] = \left[2, 1, 1, 1 + \frac{\sqrt{7} - 2}{3} \right] = \left[2, 1, 1, 1, \frac{3}{\sqrt{7} - 2} \right] \\ &= \left[2, 1, 1, 1, \sqrt{7} + 2 \right] = \left[2, 1, 1, 1, 4, \frac{1}{\sqrt{7} - 2} \right] \end{aligned}$$

Youpi! On est retombés sur $\frac{1}{\sqrt{7-2}}$, donc avec les mêmes arguments, on obtient $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$

3. On applique à nouveau les techniques de l'exercice 1.

$$\begin{aligned}
 [3, 1, 1, 4, 1, 3] &= \left[3, 1, 1, 4, 1 + \frac{1}{3} \right] = \left[3, 1, 1, 4, \frac{4}{3} \right] \\
 &= \left[3, 1, 1, 4 + \frac{3}{4} \right] = \left[3, 1, 1, \frac{19}{4} \right] \\
 &= \left[3, 1, 1 + \frac{4}{19} \right] = \left[3, 1, \frac{23}{19} \right] \\
 &= \left[3, 1 + \frac{19}{23} \right] = \left[3, \frac{42}{23} \right] \\
 &= 3 + \frac{23}{42} = \frac{149}{42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [2, 1, 1, 3, 1, 1, 2] &= \left[2, 1, 1, 3, 1, 1 + \frac{1}{2} \right] = \left[2, 1, 1, 3, 1, \frac{3}{2} \right] \\
 &= \left[2, 1, 1, 3, 1 + \frac{2}{3} \right] = \left[2, 1, 1, 3, \frac{5}{3} \right] \\
 &= \left[2, 1, 1, 3 + \frac{3}{5} \right] = \left[2, 1, 1, \frac{18}{5} \right] \\
 &= \left[2, 1, 1 + \frac{5}{18} \right] = \left[2, 1, \frac{23}{18} \right] \\
 &= \left[2, 1 + \frac{18}{23} \right] = \left[2, \frac{41}{23} \right] \\
 &= 2 + \frac{23}{41} = \frac{105}{41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [0, 2, 4, 1, 5] &= \left[0, 2, 4, 1 + \frac{1}{5} \right] = \left[0, 2, 4, \frac{6}{5} \right] \\
 &= \left[0, 2, 4 + \frac{5}{6} \right] = \left[0, 2, \frac{29}{6} \right] \\
 &= \left[0, 2 + \frac{6}{29} \right] = \left[0, \frac{64}{29} \right] \\
 &= \frac{29}{64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [-5, 1, 3, 2, 4] &= \left[-5, 1, 3, 2 + \frac{1}{4} \right] = \left[-5, 1, 3, \frac{9}{4} \right] \\
 &= \left[-5, 1, 3 + \frac{4}{9} \right] = \left[-5, 1, \frac{31}{9} \right] \\
 &= \left[-5, 1 + \frac{9}{31} \right] = \left[-5, \frac{40}{31} \right] \\
 &= -5 + \frac{31}{40} = \frac{-169}{40}
 \end{aligned}$$

4. Pour les fractions continues infinies, il n'est plus question d'appliquer l'algorithme précédent : il commence à la fin de la fraction continue. Cependant, dans le cas d'une fraction continue périodique, on peut s'en sortir en faisant apparaître une équation (quadratique) que respecte notre inconnue.

Posons $x = [\overline{1}]$, on a trivialement

$$x = [1, 1, 1, \dots] = [1, [1, 1, \dots]] = [1, x] = 1 + \frac{1}{x}$$

Donc $x^2 = x + 1$, il y a deux solutions de cette équation : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Une seule des deux est positive : c'est φ , qui est alors égale à x (car x est positif : le premier terme de son développement en fraction continue est positif).

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} [-1, 2, \overline{1}] &= \left[-1, 2 + \frac{1}{\varphi} \right] \\ &= [-1, 2 + \varphi - 1] \\ &= [-1, \varphi + 1] \\ &= [-1, \varphi^2] \\ &= -1 + \frac{1}{\varphi^2} \\ &= \frac{1 - \varphi^2}{\varphi^2} \\ &= \frac{-\varphi}{\varphi^2} = \frac{-1}{\varphi} = \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

Enfin, pour le dernier nombre z , on a $z = [\overline{4, 1, 3}] = [4, 1, 3, \overline{4, 1, 3}] = [4, 1, 3, z]$. Donc

$$\begin{aligned} z &= [4, 1, 3, z] \\ &= \left[4, 1, \frac{3z + 1}{z} \right] \\ &= \left[4, \frac{4z + 1}{3z + 1} \right] \\ &= 4 + \frac{3z + 1}{4z + 1} = \frac{19z + 5}{4z + 1} \end{aligned}$$

Donc $z(4z + 1) = 4z^2 + z = 19z + 5$ et $4z^2 - 18z - 5 = 0$. Les solutions de cette dernière équation sont $\frac{9 \pm \sqrt{101}}{4}$. Une seule de ces solutions est positive, et z est positif car le premier terme de son développement en fraction continue est positif. D'où $z = \frac{9 + \sqrt{101}}{4}$.

Exercice 4.

1. On procède par récurrence sur p : Le cas $p = 0$ est immédiat :

$$[a_0] = a_0 = \frac{a_0 h_{-1} + h_{-2}}{a_0 k_{-1} + k_{-2}}$$

Pour l'hérédité, suppose la propriété vraie pour un entier p et on cherche à la démontrer pour $p + 1$. On considère la fraction continue $[b_0, \dots, b_p]$ définie par

$$\begin{cases} b_i = a_i & \text{si } i \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket \\ b_p = a_p + \frac{1}{a_{p+1}} \end{cases}$$

On sait que $[b_0, \dots, b_p] = [a_0, \dots, a_p, a_{p+1}]$ par le premier exercice. Ensuite, on définit $(h'_n)_{n \geq -2}$ et $(k'_n)_{n \geq -2}$ les deux suites associées à la fraction continue $[b_0, \dots, b_p]$. Comme $a_i = b_i$ pour $i \leq p - 1$, on a $h_i = h'_i$ et $k_i = k'_i$

pour $i \leq p - 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}
 [a_0, \dots, a_{p+1}] = [b_0, \dots, b_p] &= \frac{b_p h'_{p-1} + h'_{p-2}}{b_p k'_{p-1} + k'_{p-2}} \\
 &= \frac{\left(a_p + \frac{1}{a_{p+1}}\right) h_{p-1} + h_{p-2}}{\left(a_p + \frac{1}{a_{p+1}}\right) k_{p-1} + k_{p-2}} \\
 &= \frac{a_p h_{p-1} + h_{p-2} + \frac{h_{p-1}}{a_{p+1}}}{a_p k_{p-1} + k_{p-2} + \frac{k_{p-1}}{a_{p+1}}} \\
 &= \frac{h_p + \frac{h_{p-1}}{a_{p+1}}}{k_p + \frac{k_{p-1}}{a_{p+1}}} \\
 &= \frac{a_{p+1} h_p + h_{p-1}}{a_{p+1} k_p + k_{p-1}}
 \end{aligned}$$

Ce qui est exactement la propriété voulue pour l'entier $p + 1$. On conclut par le principe de récurrence.

2. Ici, pas besoin de récurrence : on peut se servir de la première question. Pour alléger les notations, on fixe un entier p et on pose

$$\begin{cases}
 A := [a_0, \dots, a_p] \\
 a := a_p \\
 h := h_{p-1} \\
 h' := h_{p-2} \\
 k := k_{p-1} \\
 k' := k_{p-2}
 \end{cases}$$

Ainsi, la première question nous donne

$$\begin{aligned}
 A = \frac{ah + h'}{ak + k'} &\Leftrightarrow A(ak + k') = ah + h' \\
 &\Leftrightarrow Aak + Ak' = ah + h' \\
 &\Leftrightarrow Aak - ah = -Ak' + h' \\
 &\Leftrightarrow a(Ak - h) = -Ak' + h' \\
 &\Leftrightarrow a = \frac{-Ak' + h'}{Ak - h} \\
 &\Leftrightarrow a_p = -\frac{[a_0, \dots, a_p]k_{p-2} - h_{p-2}}{[a_0, \dots, a_p]k_{p-1} - h_{p-1}}
 \end{aligned}$$

Soit le résultat voulu.

3. Une fois encore, on raisonne par récurrence, en utilisant la définition (récursive) de h_p et k_p . L'initialisation est

$$h_{-2}k_{-1} - h_{-1}k_{-2} = 0 - 1 = -1 = (-1)^{-1}$$

Pour l'hérédité, on suppose la propriété vraie pour un entier de la forme $p - 1$ (i.e $h_{p-2}k_{p-1} - h_{p-1}k_{p-2} = (-1)^{p-1}$) et on cherche à la montrer pour p :

$$\begin{aligned}
 h_{p-1}k_p - h_p k_{p-1} &= h_{p-1}(a_p k_{p-1} + k_{p-2}) - (a_p h_{p-1} + h_{p-2})k_{p-1} \\
 &= a_p h_{p-1} k_{p-1} + h_{p-1} k_{p-2} - a_p h_{p-1} k_{p-1} - h_{p-2} k_{p-1} \\
 &= h_{p-1} k_{p-2} - h_{p-2} k_{p-1} = -(-1)^{p-1} = (-1)^p
 \end{aligned}$$

Soit le résultat voulu, on conclut par le principe de récurrence.