Correction séance 1 (8 septembre)

† *Principe de récurrence*

Exercice 1.
1. Initialisation : On montre la propriété P_1 :

$$P_1 : \quad \sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Hérédité : On montre l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Supposant P_n pour un certain entier n, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Qui est bien la propriété P_{n+1}. Par le principe de récurrence, on a montré que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$. 2. Initialisation : On montre la propriété P_1 :

$$P_1 : \quad \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

Hérédité : On montre l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Supposant P_n pour un certain entier n, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Qui est bien la propriété P_{n+1}. Par le principe de récurrence, on a montré que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

3. <u>Initialisation :</u> On montre la propriété P_1 :

$$P_1 : \quad \left(\sum_{i=1}^{1} i\right)^2 = 1 = \sum_{i=1}^{1} i^3$$

<u>Hérédité :</u> On montre l'implication $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. On note S_n la somme $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Supposant P_n pour un certain entier n, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 &= (S_n + (n+1))^2 \\
&= S_n^2 + 2S_n(n+1) + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^2 n + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^2(n+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} i^3
\end{aligned}$$

Qui est bien la propriété P_{n+1}. Par le principe de récurrence, on a montré que P_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 2.

1. a) P_0 est donnée par $0 + 0 = 0$, qui est vrai.
b) Non, il faudrait faire l'hérédité de la récurrence, qui est fausse.
c) Si P_n est vraie, alors $n + n = n$, en soustrayant n de chaque côté, on obtient $n = 0$, donc P_n n'est vraie que pour $n = 0$.

2. a) Supposons que P_n est vraie pour un entier n, on a $9^{n+1} - 9^n$ est un multiple de 10. En multipliant par 9, on obtient que $9^{n+2} - 9^{n+1} = 9(9^{n+1} - 9^n)$ est également un multiple de 10. Donc P_{n+1} est vraie.
b) Non ! Il faudrait faire l'initialisation de la récurrence, qui est fausse !
c) La propriété P_0 est fausse car $9^1 - 9^0 = 9 - 1 = 8$ n'est pas un multiple de 10.

Exercice 3.

1. Parmi deux entiers consécutifs, exactement un est un multiple de 2. Le produit $n(n+1)$ contient donc un terme pair et est pair.

2. Parmi trois entiers consécutifs, exactement un est un multiple de 3. Le produit $n(n+1)(n+2)$ contient donc un terme divisible par 3 et est divisible par 3.

3. Soit d un diviseur commun à $3n+2$ et $2n+1$. L'ensemble des multiples de d est stable par somme, multiplication par un entier quelconque, soustraction (c'est un ***idéal*** de $\mathbb{Z}$). On a donc que $2(3n+2) = 6n+4$ et $3(2n+1) = 6n+3$ sont des multiples de d, de même que

$$6n + 4 - (6n + 3) = 1$$

donc 1 est un multiple de d : $d = 1$ et nos entiers sont premiers entre eux.

Exercice 4.
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
f(n+1) - f(n) &= 10^{n+1} + 3 \times 4^{n+3} + 5 - 10^n - 3 \times 4^{n+2} - 5 \\
&= 10^n(10-1) + 4^{n+2}(12-3) \\
&= 9(10^n + 4^{n+2})
\end{aligned}$$

Donc $f(n+1) - f(n)$ est un multiple de 9.

2. On procède par récurrence.
Initialisation : On montre que $f(0)$ est divisible par 9 :

$$f(0) = 10^0 + 3 \times 4^2 + 5 = 1 + 48 + 5 = 54 = 9 \times 6$$

Hérédité : Supposons que $f(n)$ est divisible par 9 pour un certain entier n. Sachant que les multiples de 9 sont stables par sommes, on a que

$$f(n+1) = f(n+1) - f(n) + f(n)$$

est un multiple de 9, ce qui termine notre raisonnement par récurrence.