Partiel du mercredi 9 novembre 2022 - Durée 1h30

L'usage de tout document ou appareil électronique (y compris calculatrice) est prohibé. Les réponses aux questions doivent être justifiées faute de quoi elles ne rapporteront aucun point, même si elles sont justes.

Exercice 1. Recherche d'un critère de divisibilité

(a) Chercher $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $10\ell \equiv 1[31]$.

(b) Montrer que pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on a $N \equiv 10(D - 3c_0)[31]$, où c_0 est le chiffre des unités de N et D est le nombre de dizaines de N.

(c) En déduire un critère de divisibilité par 31.

(d) Utiliser le critère pour dire si 69 750 est divisible par 31.

(e) Pour quels entiers pouvez-vous trouver un critère de divisibilité en généralisant cette méthode ?

Exercice 2. Alice va au cinéma tous les 25 jours, Bob tous les 31 jours. Sachant qu'Alice était au cinéma aujourd'hui et Bob il y a 3 jours, déterminer à quel moment ils iront au cinéma le même jour.
Indication. On pourra noter d le nombre de jours jusqu'à ce qu'Alice et Bob aillent au cinéma le même jour, puis donner un système de congruence modulo 25 et modulo 31 satisfait par d et le résoudre.

Exercice 3.

(a) Quelles sont les solution de $x^2 \equiv 1[n]$ quand $n \in \mathbb{N}^*$ est premier ?

(b) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ est premier, alors $(n-1)! \equiv -1[n]$.
Indication. Pour $n \neq 2$, on pourra considérer, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, l'inverse de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(c) Soit n un entier non premier. Montrer que $(n-1)! \equiv 0[n]$ si $n \neq 4$ et $(n-1)! \equiv 2[n]$ si $n = 4$.

(d) En déduire le théorème de Wilson : un entier $n \geq 2$ est premier si et seulement si $(n-1)! \equiv -1[n]$.

Remarque : cette caractérisation fournit un test de primalité, mais peu efficace en pratique car le calcul du factoriel est beaucoup trop long, même en effectuant toutes les multiplications dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ plutôt que de calculer $(n-1)!$ et de considérer ensuite son résidu modulo n.

Exercice 4.

(a) Donner le développement en fraction continue de 22/19.

(b) Montrer que la partie entière de $\sqrt{n^2+1}$ est n, puis donner le développement en fraction continue de $\sqrt{n^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Quel est le nombre dont la fraction continue est $[1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots] = [\overline{1, 4}]$?
En déduire le nombre dont la fraction continue est $[1, 1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots] = [1, \overline{1, 4}]$.